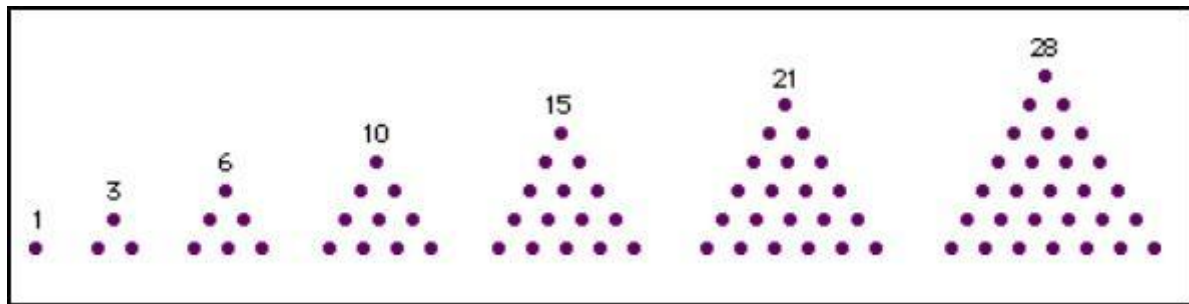


PROBLEEM 35



Hierboven staan de eerste 7 driehoeksgetallen afgebeeld.

Noem $S_O(n)$ de som van de eerste n driehoeksgetallen van oneven rang en $S_E(n)$ de som van de tussenliggende driehoeksgetallen van even rang.

Toon aan dat $S_O(n) - S_E(n)$ een kwadraatgetal is voor elke waarde van n .

Zo is bv. $S_O(3) - S_E(3) = (1 + 6 + 15) - (3 + 10) = 22 - 13 = 9 = 3^2$.

OPLOSSING

Merk op dat $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ enzovoort.

Dan is

$$\begin{aligned} S_O(n) - S_E(n) &= 1 - (1 + 2) + (1 + 2 + 3) - (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - \dots \\ &\quad - (1 + 2 + 3 + \dots (2n-2)) + (1 + 2 + 3 + \dots (2n-1)) \\ &= 1 + [- (1 + 2) + (1 + 2 + 3)] + [- (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)] - \dots \\ &\quad + [- (1 + 2 + 3 + \dots (2n-2)) + (1 + 2 + 3 + \dots (2n-1))] \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Het feit dat $1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) = n^2$ is een gekende eigenschap. Men kan die bewijzen via volledige inductie of via de formule voor de som van de eerste n termen van een rekenkundige rij:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) = \frac{1}{2} \cdot [1 + (2n-1)] \cdot n = n^2.$$

Maar wie het GNOMON-logo aandachtig bekijkt, ziet hierin direct 'een Grieks bewijs' van deze eigenschap.

