

PROBLEEM 33

Als de gehele positieve getallen a , b , c en d vier opeenvolgende termen zijn van een meetkundige rij, dan is $(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d)$ een kwadraatgetal.

Bewijs dit.

OPLOSSING

Vier opeenvolgende termen a , b , c en d uit een meetkundige kan men voorstellen door a , $b = ar$, $c = ar^2$ en $d = ar^3$.

Dan is

$$\begin{aligned}(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d) &= (a + ar^3)(ar + ar^2) - (a + ar^2)(ar + ar^3) \\&= a^2[(1 + r^3)(1 + r^2) - (1 + r)(r + r^3)] \\&= a^2(r^2 - 2r^3 + r^4) \\&= a^2(r^2 - r)^2 \\&= (ar^2 - ar)^2 \\&= (c - b)^2.\end{aligned}$$