

PROBLEEM 30

Toon aan dat voor elk natuurlijk getal n ($n \neq 0$) geldt dat de som

$$S(n) = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

kleiner is dan 1.

OPLOSSING

Merk op dat $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Dan is

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

en dit getal is bijgevolg kleiner dan 1 voor elk natuurlijk getal n ($n \neq 0$).

Merk op.

Hoe groter n wordt, hoe groter ook $S(n)$ wordt aangezien men steeds meer positieve breuken samentelt en bovendien is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$