

PARADOX VAN ZENO

Achilles en de schildpad

Stel dat de schildpad 1 000 meter voorsprong heeft op Achilles en dat Achilles 10 keer sneller loopt dan de schildpad (zo'n snelle schildpad of zo'n trage loper kom je echt niet vaak tegen!). Wanneer Achilles 1 000 meter heeft afgelegd, is de schildpad 100 meter voorop geraakt. Wanneer Achilles dan die 100 meter heeft afgelegd, is de schildpad weer 10 meter voorop geraakt. Achilles legt dan die 10 meter af, maar inmiddels is de schildpad weer 1 meter voorop geraakt. Enzovoort En dus zal Achilles blijkbaar de schildpad nooit inhalen.

Hoe verklaar je dan dat Achilles de schildpad inhaalt na 1 111,111... meter?



VERKLARING 1

De 'oneindige som' $S = 1\,000 + 100 + 10 + 1 + 0,1 + \dots$ is gelijk aan

$$\frac{1\,000}{1 - 0,1} = \frac{1\,000}{\frac{9}{10}} = \frac{10\,000}{9} = 1\,111,111\dots$$

Uitleg hierover vind je op http://nl.wikipedia.org/wiki/Zeno's_paradoxen.

VERKLARING 2

Pas de formule toe voor de afgelegde weg s in functie van de tijd t bij een beweging met constante snelheid v :

$$s = v t \text{ (voor Achilles)}$$

en

$$s = 1\,000 + \frac{v}{10} t \text{ (voor de schildpad).}$$

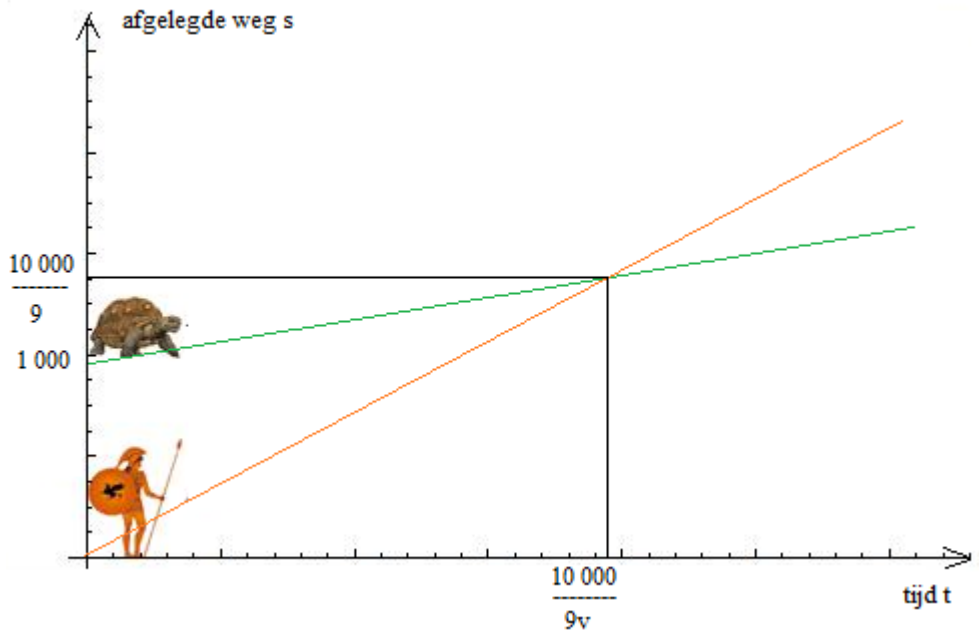
Door gelijkstelling vind je dat

$$t = \frac{10}{9} \cdot \frac{1\,000}{v} = \frac{10\,000}{9v}$$

zodat

$$s = v \frac{10\,000}{9v} = \frac{10\,000}{9} = 1\,111,111\dots$$

Op een grafiek ziet dit er als volgt uit:



VERKLARING 3

Als Achilles x meter aflegt, zit de schildpad $1\,000 + \frac{x}{10}$ meter voorop.
Stel deze twee afstanden aan elkaar gelijk :

$$x = 1\,000 + \frac{x}{10} .$$

Dan volgt hieruit dat

$$\frac{9}{10} x = 1\,000$$

zodat

$$x = \frac{10\,000}{9} = 1\,111,111 \dots$$