

PROBLEEM 28

Met behulp van muntjes die allemaal dezelfde grootte hebben, vormt men zeshoekige figuren zoals op de onderstaande figuur. We nemen als 'kleinste zeshoek' de figuur die bestaat uit één muntje.



Noem z_k het aantal muntjes dat men nodig heeft om de k -de figuur te vormen, die dus een opgevulde zeshoekige figuur is met k muntjes op elke zijde.

Zo is $z_1 = 1$, $z_2 = 7$, $z_3 = 19$... (zie figuur).

Vind en bewijs de formule voor de som $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ waarbij n een willekeurig natuurlijk getal n is ($n \geq 1$), m.a.w. hoeveel muntjes zijn er in totaal nodig om de eerste tot met de n -de figuur te vormen?

EERSTE OPLOSSING

We stellen eerst een recursieformule op voor het aantal muntjes a_k in de k -de figuur:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 6 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 6 \times 2$$

...

$$a_k = a_{k-1} + 6 \times (k - 1)$$

Dus is het totale aantal muntjes dat nodig is om de k -de figuur te vormen gelijk aan

$$1 + 6(1 + 2 + \dots + (k - 1)) = 1 + 6 \frac{k(k - 1)}{2} = 1 + 3k(k - 1).$$

We bewijzen nu via volledige inductie dat het totale aantal muntjes S_k om de eerste tot en met de n -de figuur te vormen gelijk is aan n^3 .

- De formule klopt voor $n = 1$.
- Stel dat $S_k = k^3$.
Dan is $S_{k+1} = k^3 + [1 + 3(k+1)k] = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$.

TWEEDE OPLOSSING

Voor het totale aantal muntjes a_k in de k -de figuur tellen we het aantal muntjes per rij samen (een rij loopt evenwijdig met een zijde):

$$a_k = k + (k + 1) + \dots (2k - 2) + (2k - 1) + (2k - 2) + \dots + (k + 1) + k.$$

Dit aantal is gelijk aan

$$\begin{aligned} 2[k + (k + 1) + \dots + (2k - 2)] + (2k - 1) &= 2 \frac{[k + (2k - 2)](k - 1)}{2} + (2k - 1) \\ &= (3k - 2)(k - 1) + (2k - 1) \\ &= 3k^2 - 3k + 1. \end{aligned}$$

Rekening houdend met de gekende sommen

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

vinden we dat

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + n = n^3.$$