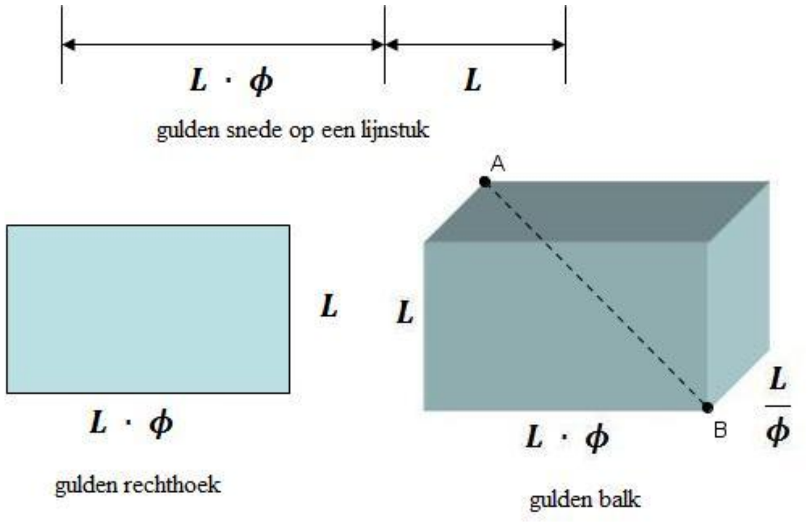
GULDEN BALK

Als veralgemening van de gulden snede op een lijnstuk en een gulden rechthoek
denkt men uiteraard aan een gulden balk.
Dit is een balk met als afmetingen L, Lϕ en L/ϕ waarbij ϕ het getal is van de gulden snede.



$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

OPGAVE 1.
Toon aan dat de lichaamsdiagonaal [AB] van een gulden balk als lengte 2L heeft.

OPLOSSING

De lengte D van een lichaamsdiagonaal is

$$D = \sqrt{L^2 + (L\phi)^2 + (\frac{L}{\phi})^2} = \sqrt{\frac{L^2(\phi^4 + \phi^2 + 1)}{\phi^2}}.$$

Nu is $\phi^2 = \phi + 1$, zodat $\phi^4 = \phi^2 + 2\phi + 1 = (\phi + 1) + 2\phi + 1 = 3\phi + 2$.

Dan is

$$D = L\,.\sqrt{\frac{(3\phi + 2) + (\phi + 1) + 1}{\phi + 1}} = L\,.\sqrt{\frac{4\phi + 4}{\phi + 1}} = 2L.$$

OPGAVE 2.
Een balk heeft een volume van 1 dm^3, een hoogte van 1 dm en de lichaamsdiagonalen hebben een lengte van 2 dm. Toon aan dat dit een gulden balk is.

OPLOSSING

Als de afmetingen van de balk a, b en 1 zijn dan is

$$\begin{cases} ab = 1 \quad (volume) \\ \sqrt{a^2 + b^2 + 1} = 2 \ \ (lichaamsdiagonaal) \end{cases}$$

zodat ab = 1 (1) en $a^2 + b^2 = 3$ (2).

Uit (1) volgt dat b = 1/a en dus is (2): $a^2 + 1/a^2 = 3$ zodat $a^4 - 3a^2 + 1 = 0$.

Als oplossing van deze bikwadratische vergelijking vinden we dat

$$a^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

zodat

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \quad \text{en} \quad b = \frac{1}{\phi}.$$