

PROBLEEM 25

Stel $S_A(n)$ = de derdemacht van de som van de eerste n oneven natuurlijke getallen
d.w.z. $S_A(n) = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)]^3$
en $S_B(n)$ = de som van de derdemachten van de eerste n oneven natuurlijke getallen
d.w.z. $S_B(n) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3$.
Toon aan dat $S_B(n) = 2n^4 - n^2$ en dat $S_A(n) - S_B(n)$ een kwadraatgetal is voor elke waarde van n .

OPLOSSING

We maken gebruik van een gekende sommatieformule die men gemakkelijk bewijst door volledige inductie:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Uit deze formule volgt dat

$$1^3 + 2^3 + \dots + (2n)^3 = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} \quad (1)$$

en dat

$$2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \frac{8n^2(n+1)^2}{4} \quad (2)$$

Uit (1) – (2) volgt dan na een beetje rekenwerk dat $S_B(n) = 2n^4 - n^2$.

Anderzijds is het een gekend resultaat dat $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ (gnomon-formule) zodat $S_A(n) = n^6$.

Dus is $S_A(n) - S_B(n) = n^6 - 2n^4 + n^2 = n^2(n^4 - 2n^2 + 1) = n^2(n^2 - 1)^2 = (n^3 - n)^2$.

Voorbeeld.

$S_A(4) = (1 + 3 + 5 + 7)^3 = 4096$ en $S_B(4) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 496$.
 $S_A(4) - S_B(4) = 3600 = 60^2 = (4^3 - 4)^2$.