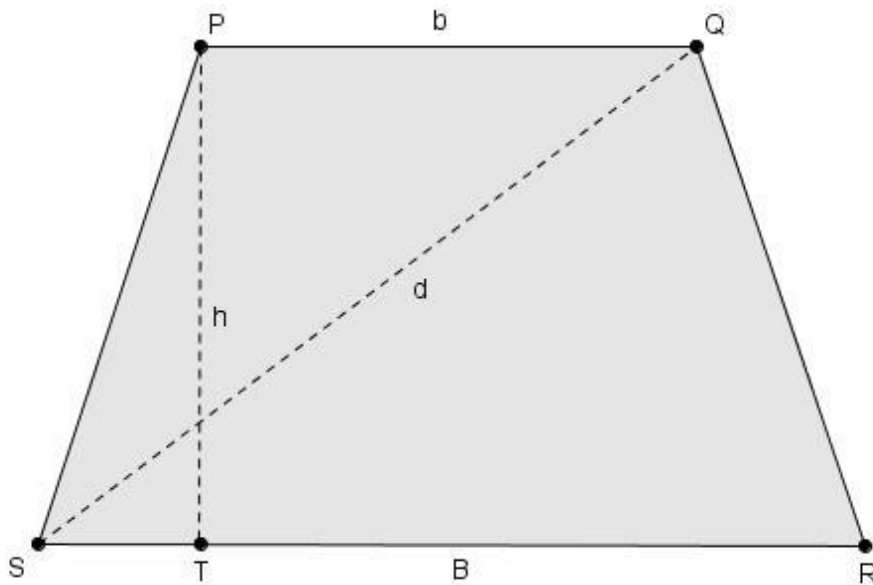


## PROBLEEM 21

In een gelijkbenig trapezium PQRS is  $b$  de kleine basis en  $B$  de grote basis,  $h$  is de hoogte en  $d$  is de lengte van de twee diagonalen.

Als  $b = h$  en  $B = d$ , toon dan aan dat  $b/B = 3/5$ .



### EERSTE OPLOSSING

Stel  $|PS| = |QR| = x$ .

Een gelijkbenig trapezium is een koordenvierhoek (d.w.z. dat de vier hoekpunten en één cirkel liggen) en dan volgt uit de stelling van Ptolemaeus dat

$$bB + x^2 = d^2$$

zodat

$$x^2 = d^2 - bB = B^2 - bB \quad (1)$$

Anderzijds volgt uit de stelling van Pythagoras in  $\triangle PST$  dat

$$\begin{aligned} x^2 &= h^2 + \frac{(B-b)^2}{4} \\ &= b^2 + \frac{(B-b)^2}{4} \\ &= \frac{5b^2 - 2bB + B^2}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt dat  $5b^2 + 2bB - 3B^2 = 0$  zodat

$$5\left(\frac{b}{B}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{B}\right) - 3 = 0,$$

waaruit volgt dat  $b/B = 3/5$ .

## TWEEDE OPLOSSING

Stel  $\widehat{QSR} = \alpha$ , dan is

$$\sin \alpha = \frac{h}{d} = \frac{b}{B}$$

en

$$\cos \alpha = \frac{b + \frac{1}{2}(B - b)}{d} = \frac{b + \frac{1}{2}(B - b)}{B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{B}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \Updownarrow \\ \left(\frac{b}{B}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{B}\right)^2 &= 1 \\ \Updownarrow \\ 5 \left(\frac{b}{B}\right)^2 + 2 \left(\frac{b}{B}\right) - 3 &= 0 \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\frac{b}{B} = \frac{3}{5}.$$