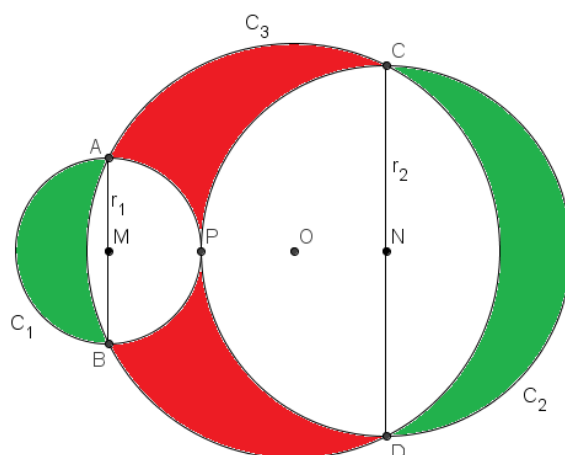


PROBLEEM 15

Twee cirkels C_1 en C_2 met middelpunten M en N en stralen r_1 en r_2 raken elkaar uitwendig in het punt P . $[AB]$ en $[CD]$ zijn twee evenwijdige middellijnen van deze cirkels. Een derde cirkel C_3 met middelpunt O gaat door de punten A , B , C en D . Toon aan dat de gebieden die in het rood en het groen gekleurd zijn op de onderstaande figuur dezelfde oppervlakte hebben.



OPLOSSING

Stel $|OP| = d$.

$$\text{Witte oppervlakte} + \text{rode oppervlakte} = \pi|OA|^2 = \pi(r_1^2 + (r_1 + d)^2) \quad (1)$$

$$\text{Witte oppervlakte} + \text{rode oppervlakte} = \pi|OC|^2 = \pi(r_2^2 + (r_2 - d)^2) \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan

$$\begin{aligned} 2r_1^2 + 2r_1d &= 2r_2^2 - 2r_2d \\ \downarrow \\ (r_2 - r_1)d &= r_2^2 - r_1^2 \quad (3) \end{aligned}$$

1^{ste} geval. $r_1 \neq r_2$.

Uit (3) volgt dan dat $d = r_2 - r_1$ of $r_1 + d = r_2$.

Dan is wegens (2) : de witte oppervlakte + de rode oppervlakte = $\pi(r_1^2 + r_2^2)$ en dit is precies gelijk aan de groene oppervlakte + de witte oppervlakte. Hieruit volgt het gewenste resultaat.

2^{de} geval: $r_1 = r_2$.

Dan is $O = P$ en $|OA| = |OC| = \sqrt{2}r_1 = \sqrt{2}r_2$.

De witte oppervlakte + de rode oppervlakte = $2\pi r_1^2 = 2\pi r_2^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ en dit is precies gelijk aan de groene oppervlakte + de witte oppervlakte. Hieruit volgt weer het gewenste resultaat.

