

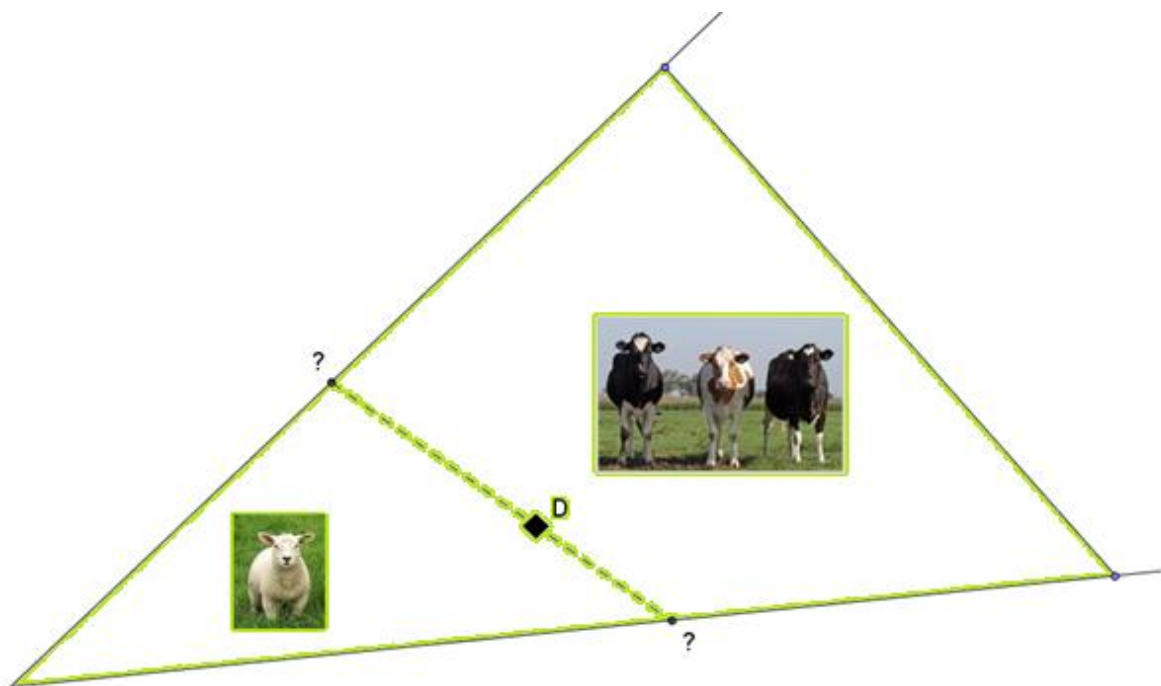
HET PROBLEEM VAN BOER BAVO

Een extremumvraagstuk en een constructie uit de oude doos

Luc Gheysens en Daniël Tant

PROBLEEMSTELLING

Boer Bavo bezit een stuk weiland in de vorm van een driehoek en heeft één schaap en drie koeien. Hij is van plan om een driehoekig deel van de weide af te bakenen waarop hij het schaap zal laten grazen. De rechtlijnige afsluiting wil hij echter door de drenkplaats D (zie figuur 1) laten lopen zodat deze zowel voor het schaap als voor de koeien dienst kan doen. Hij wil ook dat het driehoekig deel waarop het schaap zal grazen zo klein mogelijk is. Waar moet hij de afsluiting aanbrengen?

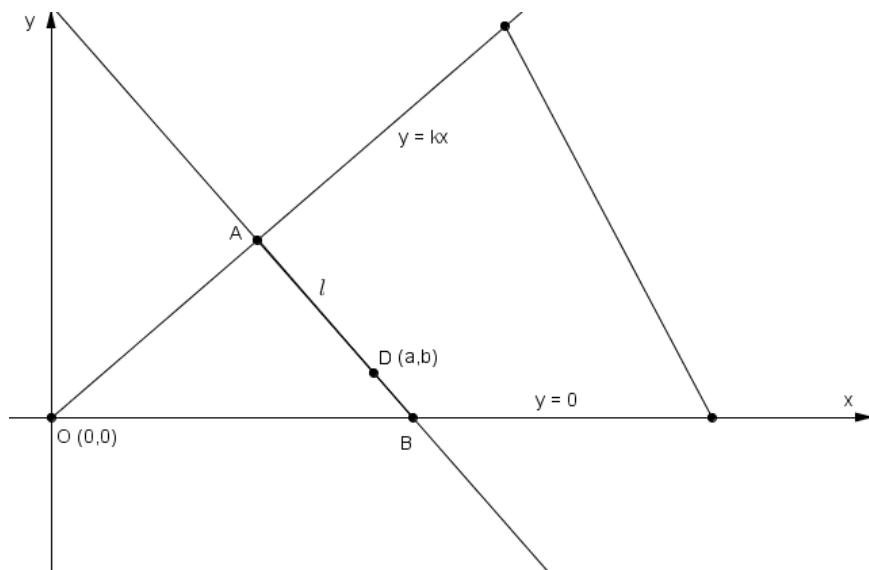


Figuur 1

OPLOSSING

Boer Bavo moet ervoor zorgen dat D in het midden ligt van de afsluiting. Om dit te bewijzen gebruiken we de klassieke manier om een extremumvraagstuk aan te pakken, nl. via het bepalen van de nulwaarde van de eerste afgeleide van de functie voor de oppervlakte van de driehoek.

Kies het assenstelsel zoals op figuur 2. De driehoek OAB wordt begrensd door de x-as, de rechte met als vergelijking $y = kx$ en een variabele rechte l door het punt $D(a,b)$. De rechte l heeft dan als vergelijking $y - b = m(x - a)$, waarbij m een variabele richtingscoëfficiënt is.



Figuur 2

Door telkens een eenvoudig stelsel op te lossen bepalen we de coördinaten van de snijpunten A en B van de rechte l met de rechten $y = kx$ en $y = 0$:

$$A\left(\frac{b - ma}{k - m}, k \cdot \frac{b - ma}{k - m}\right) \text{ en } B\left(\frac{ma - b}{m}, 0\right).$$

Via de klassieke determinantformule bepalen we hiermee de oppervlakte van driehoek OAB:

$$\text{opp. } \Delta OAB = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{ma - b}{m} & 0 & 1 \\ \frac{b - ma}{k - m} & k \cdot \frac{b - ma}{k - m} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| k \cdot \frac{(ma - b)^2}{m^2 - km} \right|.$$

Dan is

$$\frac{d}{dm} \frac{(ma - b)^2}{m^2 - km} = 0 \Leftrightarrow (m^2 - km)2(ma - b)a - (ma - b)^2(2m - k) = 0.$$

Aangezien de gezochte richtingscoëfficiënt m een negatieve waarde heeft is $ma - b \neq 0$ en vinden we dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} \frac{(ma - b)^2}{m^2 - km} = 0 &\Leftrightarrow 2a(m^2 - km) - (ma - b)(2m - k) = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{bk}{2b - ak}. \end{aligned}$$

Dat het hier om een minimum gaat blijkt duidelijk uit de aard van het probleem.

Als we anderzijds uitdrukken dat D het midden is van [AB] vinden we na enig rekenwerk zowel voor de x- als voor de y-coördinaat van D dezelfde voorwaarde:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{b-ma}{k-m} + \frac{ma-b}{m}}{2} &= a \Leftrightarrow m(b-ma) + (k-m)(ma-b) = 2am(k-m) \\ &\Leftrightarrow (2b-ak)m = bk \\ &\Leftrightarrow m = \frac{bk}{2b-ak}.\end{aligned}$$

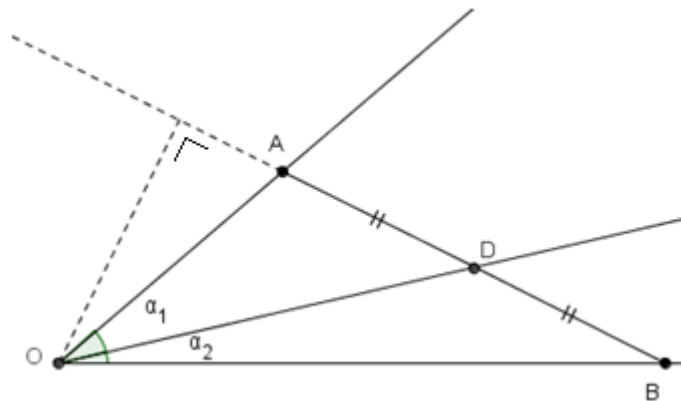
en

$$\begin{aligned}\frac{k \cdot \frac{b-ma}{k-m} + 0}{2} &= b \Leftrightarrow kb - akm = 2b(k-m) \\ &\Leftrightarrow (2b-ak)m = bk \\ &\Leftrightarrow m = \frac{bk}{2b-ak}.\end{aligned}$$

We geven ook een antwoord op de vraag hoe men die rechte die door het punt D gaat construeert. Uit de constructie blijkt opnieuw dat de oplossing uniek is.

CONSTRUCTIE

STAP 1. We gaan er van uit dat het probleem is opgelost (figuur 3).



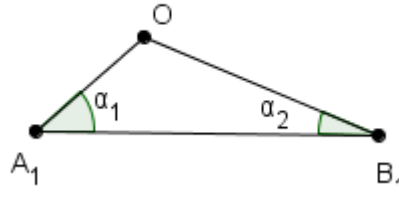
Figuur 3

Merk op: aangezien D een vast punt en de halfrechten [OA en [OB gegeven zijn, kennen we de hoeken α_1 en α_2 .

We stellen vast dat

$$\begin{aligned}2 \cdot \text{opp.} \triangle OAD &= 2 \cdot \text{opp.} \triangle ODB \\ &\Updownarrow \\ |OA| \cdot |OD| \cdot \sin \alpha_1 &= |OD| \cdot |OB| \cdot \sin \alpha_2 \\ &\Updownarrow \\ \frac{|OB|}{\sin \alpha_1} &= \frac{|OA|}{\sin \alpha_2}.\end{aligned}$$

STAP 2. Construeer een driehoek OA_1B_1 met een willekeurige basis $[A_1B_1]$ en de gekende basishoeken α_1 en α_2 (figuur 4).

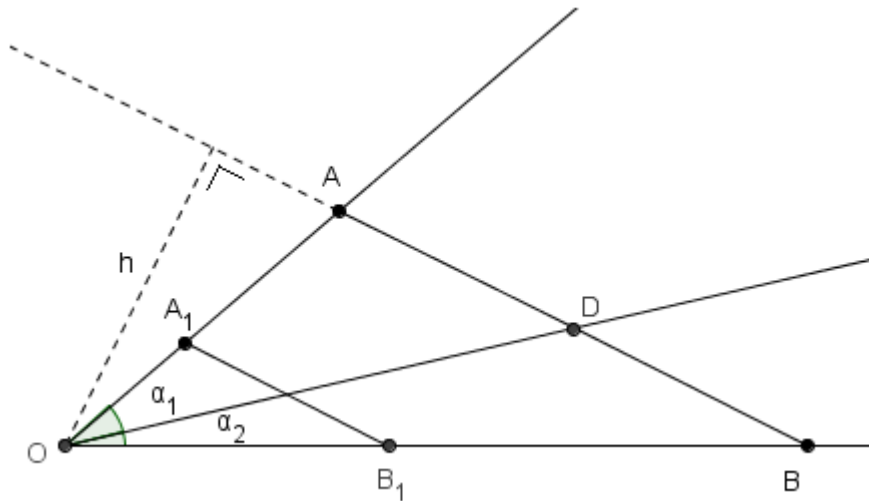


Figuur 4

Wegens de sinusregel geldt:

$$\frac{|OB_1|}{|OA_1|} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

STAP 3. Neem nu de opgave en construeer uitgaande van figuur 4 de lijnstukken $[OA_1]$ en $[OB_1]$ op de halfrechten $[OA]$ en $[OB]$ en construeer door het punt D de evenwijdige AB met A_1B_1 (figuur 5).



Figuur 5

Uit de constructie volgt

$$\begin{aligned} \frac{|OB_1|}{|OA_1|} &= \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \\ &\Leftrightarrow \\ |OA| \cdot \sin \alpha_1 &= |OB| \cdot \sin \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OD| \cdot \sin \alpha_1 &= \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |OD| \cdot \sin \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow \\ opp. \Delta OAD &= opp. \Delta ODB \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot h \cdot |AD| &= \frac{1}{2} \cdot h \cdot |DB| \\ &\Leftrightarrow \\ |AD| &= |DB|. \end{aligned}$$