

PROBLEEM 16

Men ordent de natuurlijke getallen op de volgende manier in horizontale rijen:

0 1
2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
...

Hierbij staan de getallen in de natuurlijke volgorde en elke volgende rij bevat vier getallen meer dan de vorige rij.

Toon aan dat de som van de getallen in elke horizontale rij gelijk is aan de derde macht van een natuurlijk getal.

Zo is bv. $8 + 9 + 10 + \dots + 17 = 125 = 5^3$.

OPLOSSING

Op de n -de horizontale rij staan $2 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 2$ getallen.

We bereken het totale aantal getallen in de eerste $n - 1$ rijen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} (4i - 2) &= \left(4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \right) - (n - 1) \cdot 2 \\ &= 4 \cdot \frac{(1 + (n - 1)) \cdot (n - 1)}{2} - (n - 1) \cdot 2 \\ &= 2n(n - 1) - 2(n - 1) \\ &= 2n^2 - 4n + 2.\end{aligned}$$

Omdat het eerste getal 0 is, is het eerste getal van de n -de rij bijgevolg $2n^2 - 4n + 2$.

Het laatste getal van de n -de rij is dan $2n^2 - 4n + 2 + (4n - 1) = 2n^2 + 1$.

Als som van de getallen op de n -de rij vinden we dan

$$\frac{[(2n^2 - 4n + 2) + (2n^2 + 1)](4n - 2)}{2} = (4n^2 - 4n + 1)(2n - 1) = (2n - 1)^3.$$