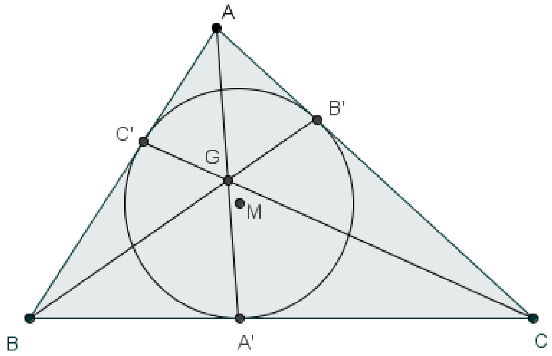
PROBLEEM 12

De ingeschreven cirkel van een willekeurige driehoek ABC raakt respectievelijk in de punten A’, B’ en C’ aan de zijden [BC], [CA] en [AB]. Toon aan dat de rechten AA’, BB’ en CC’ door één punt gaan.



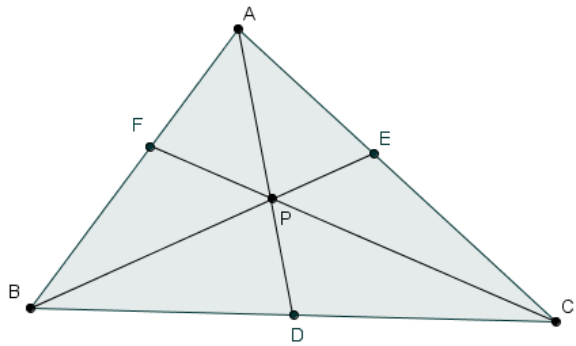
AA’, BB’ en CC’ gaan door het punt G.
M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van Δ ABC.

Bewijs.

Dit is een eenvoudige toepassing van de gekende stelling van Ceva uit de vlakke meetkunde (zie bv. http://en.wikipedia.org/wiki/Ceva's_theorem).

STELLING VAN CEVA
Bij een willekeurige driehoek ABC kiest men op elk van de zijden een punt : D op [BC], E op [CA] en F op [AB]. Dan gaan de rechten AD, BE en CF door één punt als en slechts als

$$\frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = 1.$$



Aangezien A’, B’ en C’ de raakpunten zijn van de ingeschreven cirkel aan de drie zijden van driehoek ABC is $|AB'| = |AC'|,\ |BA'| = |BC'|\ en\ |CA'| = |CB'|$.
Dus is

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} \cdot \frac{|CB'|}{|AB'|} \cdot \frac{|AC'|}{|BC'|} = 1.$$

Het punt G noemt men het punt van Gergonne, genoemd naar de Franse wiskundige Joseph Gergonne.