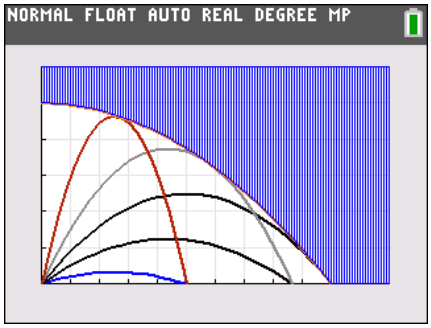
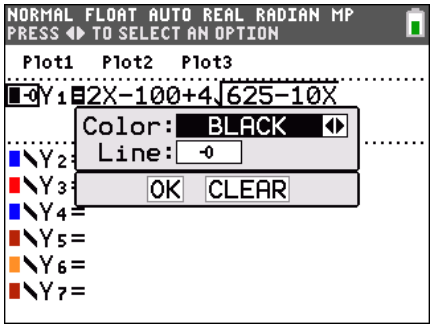
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 40

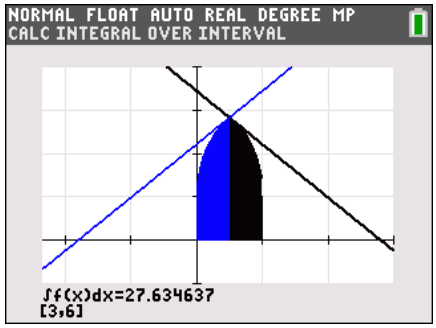
Wiskundige uitdagingen met de TI-84

Het nut van een grafisch rekentoestel bij de aanpak van problemen in de derde graad

Luc Gheysens







KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

VERANTWOORDING

Dit cahier is geschreven vanuit het standpunt van ‘de onderzoeker’. Aan de hand van twintig uitgewerkte voorbeelden proberen we aan te tonen dat een grafische rekenmachine (GRM) niet enkel kan helpen om een concreet probleem aan te pakken, maar ook inspiratie kan bieden om nieuwe problemen en eigenschappen te ontdekken. Voor de uitwerking hebben we gebruik gemaakt van een TI-84 Plus C Silver Edition.

We hebben hierbij geput uit onze eigen jarenlange onderwijservaring, uit voorbeelden die werden aangereikt door collega’s in tijdschriften en op diverse nascholingen en uit een aantal praktische voorbeelden van op de website www.wiskunde-examens.nl.

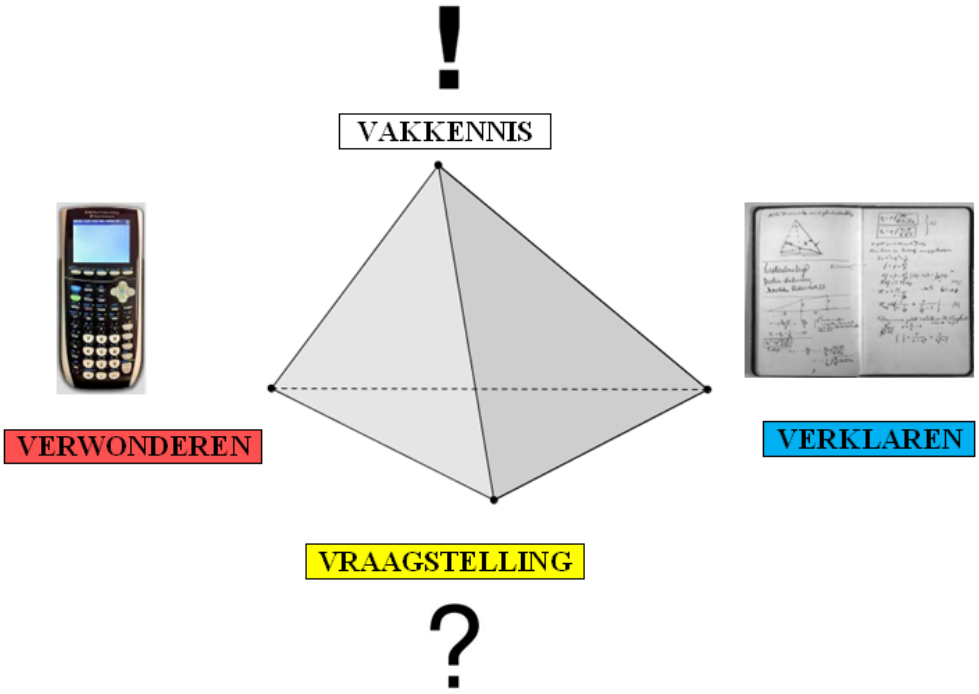
Met behulp van een GRM kan een onderzoekende leerling/docent een probleem visualiseren. We hebben er daarom op de eerste plaats voor gekozen om eigenschappen van diverse soorten functies te onderzoeken. Een grafiek plotten in een passend venster is alvast een eerste uitdaging. De GRM biedt daarnaast heel wat andere onderzoeksmogelijkheden, bijvoorbeeld bij de studie van rijen en matrices, bij toepassingen uit de kansrekening en de statistiek … In de onderstaande tabel staat een overzicht van de onderwerpen en de ermee verbonden wiskundige begrippen die in dit cahier aan bod komen.

ONDERWERPEN	WISKUNDIGE BEGRIPPEN
1. BODY MASS INDEX	Functies van de eerste graad
2. WISSELFUNCTIES	Functies van de eerste graad
3. BUITEN SCHOT	Functies van de tweede graad
4. EEN VERRASSENDE SNIJLIJN	Functies van de derde graad
5. MIDDENIN GERAAKT	Functies van de derde graad
6. PHI EN BUIGPUNTEN	Functies van de vierde graad
7. DUBBELE OPPERVLAKTE	Functies van de vierde graad
8. CONSTANTE VERHOUDING VAN OPPERVLAKTEN	Functies van de n-de graad
9. DE ONTPLOFTE VUURPIJL	Irrationale functie
10. RAAKLIJN EN ASSEGMENTEN	Impliciet gedefinieerde functies
11. EXTREMUMPROBLEEM	Irrationale functie Programmeren op een GRM
12. GEWICHTSTOENAME BIJ EEN ZWANGERE VROUW	Lineaire en exponentiële regressie
13. HET GETAL VAN EULER	Natuurlijk exponentiële en logaritmische functie
14. DE IDEALE GASAANSLUITING	Irrationale en goniometrische functie
15. DE BEWAKINGSCAMERA BOVEN DE STADSPOORT	Transformatie van grafieken Bepaalde integraal
16. DE GROEI VAN ZONNEBLOEMEN	Rijen en logistische groei
17. DE VERKOOP VAN CHOCOPASTA	Rijen, limieten en differentievergelijkingen
18. DE GEMANIPULEERDE EXAMENRESULTATEN	De normale verdeling
19. SEVEN UP	Kansrekenen
20. FIBONACCI EN PELL	Matrixrekenen

Vertrekkend van een probleem hebben we telkens geprobeerd via de GRM verwondering op te wekken. De GRM biedt niet enkel de mogelijkheid om een bepaalde eigenschap vast te stellen en te controleren maar roept vaak ook meteen een nieuwe vraag op of nodigt uit tot een veralgemening. Op dat moment treedt de vakkennis in werking. We nemen aan dat 'de onderzoeker' over voldoende parate kennis beschikt of bronnen kan raadplegen om een probleem in een passend kader te plaatsen. Een wiskundige zal dan hopelijk spontaan naar kladpapier grijpen en pogen een verklaring of een bewijs op papier te zetten. De GRM zal in vele gevallen toelaten deze uitwerking concreet te controleren en kan meteen uitnodigen tot een nieuwe vraag of tot een analoge vraag met gewijzigde gegevens.

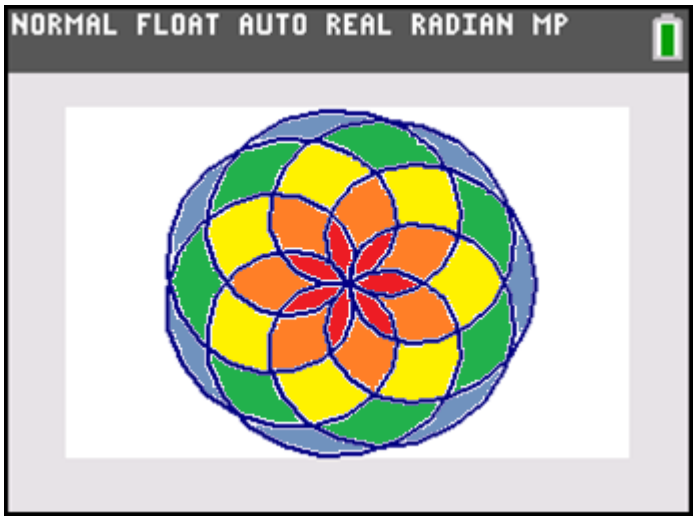
Deze werkwijze waarbij de GRM een centrale rol speelt resulteert uiteindelijk in het model van het 4V-VIERVLAK. De 4 V's zijn hierbij VRAAGSTELLING, VERWONDERING, VAKKENNIS en VERKLARING. De zes ribben van het viervlak leggen een verbinding vanuit elk van de vier V's naar de drie andere hoekpunten, waarmee we aangeven dat er tussen elk van deze V's een interactie ontstaat. Het ruimtelijk model van het viervlak suggereert bovendien dat 'de onderzoeker' op deze manier zijn interesse en vakkennis kan verruimen.

HET 4V-VIERVLAK



In het eerste deel van dit cahier reiken we de twintig problemen aan op afzonderlijke pagina's. In het tweede deel staat dan telkens de oplossing en/of verklaring. Met dank aan Geert Delaleeuw en Guido Herweyers voor het nalezen van de tekst en de waardevolle opmerkingen. We hopen dat dit cahier en het gebruik van een TI-84 Color meteen wat kleur zal geven aan een aantal wiskundelessen!

Dr. Luc Gheysens
april 2014



Creatie met een TI-84 Color

$$\begin{cases} x = \cos 9t + \cos 2t \\ y = \sin 9t + \sin 2t \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

DEEL 1
DE OPGAVEN

ONDERWERPEN
1. BODY MASS INDEX
2. WISSELFUNCTIES
3. BUITEN SCHOT
4. EEN VERRASSENDE SNIJLIJN
5. MIDDENIN GERAAKT
6. PHI EN BUIGPUNTEN
7. DUBBELE OPPERVLAKTE
8. CONSTANTE VERHOUDING VAN OPPERVLAKTEN
9. DE ONTPLOFTE VUURPIJL
10. RAAKLIJN EN ASSEGMENTEN
11. EXTREMUMPROBLEEM
12. GEWICHTSTOENAME BIJ EEN ZWANGERE VROUW
13. HET GETAL VAN EULER
14. DE IDEALE GASAANSLUITING
15. DE BEWAKINGSCAMERA BOVEN DE STADSPOORT
16. DE GROEI VAN ZONNEBLOEMEN
17. DE VERKOOP VAN CHOCOPASTA
18. DE GEMANIPULEERDE EXAMENRESULTATEN
19. SEVEN UP
20. FIBONACCI EN PELL

1 BODY MASS INDEX

In 1995 hebben de U.S. National Institutes of Health en de American Health Foundation nieuwe richtlijnen uitgegeven die het ideale, gezonde lichaamsgewicht definiëren als een Body Mass Index onder de waarde 25.

$$BMI = \frac{lichaamsgewicht\ in\ kg}{kwadraat\ van\ \ lichaamslengte\ in\ m}.$$

Uit een studie bleek dat 59% van de Amerikanen boven deze norm zat.

In de onderstaande tabel staat telkens het verband tussen de BMI en de zogenaamde GRF (gezondheidsrisicofactor).

Mannen	Vrouwen	Gezondheidsrisicofactor
minder dan 20,7	minder dan 19,1	Te laag. Hoe lager uw BMI, hoe groter het risico
20,7 tot 26,4	19,1 tot 25,8	Normaal, laagste risico
26,5 tot 27,8	25,9 tot 27,3	Enigszins te zwaar, enig risico
27,9 tot 31,1	27,4 tot 32,2	Overgewicht, riskant
31,2 tot 45,4	32,3 tot 44,8	Zwaar overgewicht, hoog risico
groter dan 45,4	groter dan 44,8	Morbide obesitas, zeer hoog risico

Probleem 1. Ik heb een lichaamslengte van 1,74 m.
Hoe zal mijn BMI variëren als mijn gewicht verandert?
Vanaf welk gewicht zit mijn BMI boven de waarde 25?
Tik hiervoor het volgende functievoorschrift in : $y = \frac{x}{1{,}74^2}$ en stel een tabel op met functiewaarden.

Probleem 2. Ilse en Johanna zijn resp. 1,64 m en 1,72 m groot. Ze beweren dat ze precies evenveel wegen en dat hun BMI 2 eenheden verschilt. Hoeveel bedraagt hun gewicht en hoeveel is hun BMI?

Los dit op met de GRM door het snijpunt van twee rechten te bepalen.
Los dit probleem ook algebraïsch op.

Probleem 3. Johannes en Lucas zijn resp. 1,72 m en 1,64 m groot en beweren dat ze dezelfde BMI hebben en dat de ene 7,5 kg meer weegt dan de andere. Hoeveel bedraagt hun BMI en hoeveel weegt elk?

Los dit op met de GRM door het snijpunt van twee rechten te bepalen.
Los dit probleem ook algebraïsch op.

2 WISSELFUNCTIES

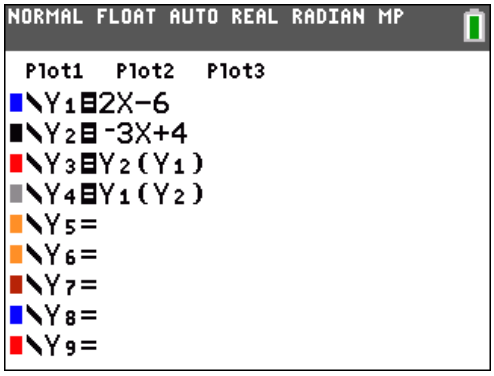
We vertrekken van twee eerstegraadsfuncties f en g met als voorschrift $f(x) = ax + b$ en $g(x) = cx + d$ (met $a \neq 0$ en $c \neq 0$). We bepalen hiermee de samengestelde functies g o f (lees 'g na f') via het voorschrift

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = c(ax + b) + d = acx + bc + d$$

en de samengestelde functie f o g met als voorschrift

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b.$$

Voorbeeld.
Stel dat $f(x) = 2x – 6$ en $g(x) = -3x + 4$.
Tik het voorschrift in van beide functies bij Y_1 en Y_2.
Schets de grafieken van f en g (via Zoom 4:ZDecimal). Schets daarna ook de grafieken van de samengestelde functies g o f (via $Y_3 = Y_2(Y_1)$) en f o g (via $Y_4 = Y_1(Y_2)$).
Blijkbaar bekom je zo twee evenwijdige rechten (waarom?). Bepaal via algebraïsch rekenwerk de vergelijking van beide rechten.



<u>Probleem.</u> Wanneer is g o f = f o g (m.a.w. wanneer commuteren f en g) ?

Uit de bovenstaande berekening blijkt dat beide functies hetzelfde voorschrift hebben als $bc + d = ad + b$.

Vertrek nu eens van twee rechten die elkaar snijden op de eerste bissectrice (de rechte met als vergelijking $y = x$). Wat stel je vast? Kan je dit ook verklaren?

Wanneer is $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$?

Onderzoek of f en g kunnen commuteren als $f(x) = ax + b$ en $g(x) = ax + c$, m.a.w. als de twee rechten evenwijdig zijn.

3 BUITEN SCHOT

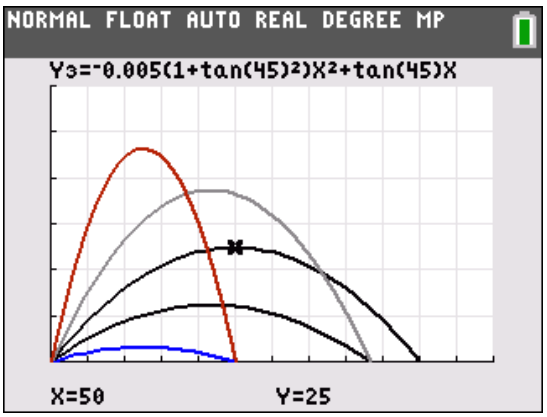
Een pijl die met een beginsnelheid v_0 (uitgedrukt in m/s) wordt afgeschoten onder een hoek α met de horizontale richting, beschrijft onder invloed van de gravitatiekracht een parabolische baan met als vergelijking

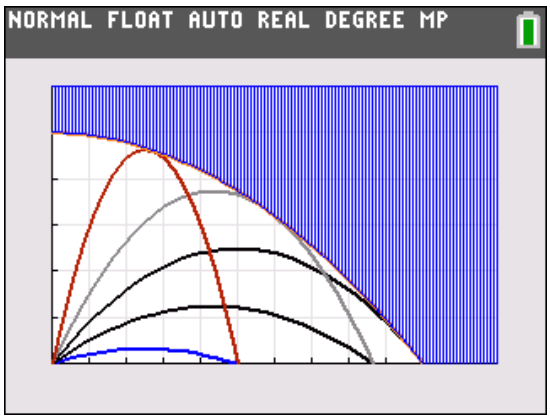
$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + \tan\alpha \cdot x\,.$$

Hierbij is g de valversnelling (g = 9,81 m/s²) en wordt de luchtweerstand verwaarloosd.

De kracht waarmee de pijl wordt afgeschoten bepaalt uiteraard de beginsnelheid v_0.

Schets op jouw GRM op één scherm de baan van de pijl voor α = 15°, 30°, 45°, 60° en 75°, waarbij je voor $g/(2v_0^2)$ de waarde 0,005 neemt. Hoeveel is de beginsnelheid dan uitgedrukt in km/h?





<u>Probleem</u>.

We stellen vast dat er een gebied is waar geen enkele pijl kan terechtkomen, waar m.a.w. de vogels buiten schot blijven. Dit gebied is op de rechtse figuur hierboven gearceerd. Hoe bepaal je dit gebied?

<u>Enkele vaststellingen en bijkomende problemen.</u>

1. Controleer dat voor α = 45° de pijl de grond raakt op 100 meter van de schutter verwijderd. Toon dit aan via algebraïsch rekenwerk.

2. Waarom komt geen enkele pijl op een afstand van meer dan 100 meter van de schutter terecht?

3. Een pijl wordt onder een hoek van 60° afgeschoten. Hoe ver komt hij op de grond terecht?

4. Een pijl komt 50 meter ver op de grond terecht. Onder welke hoek werd hij afgeschoten?

5. Onder welke hoek moet men de pijl afschieten om het punt te treffen op een hoogte van 30 meter en 20 meter van de schutter verwijderd (horizontaal gemeten)?
   Dit kan je oplossen met de GRM door gebruik te maken van de Solver-instructie.

4 DE VERRASSENDE SNIJLIJN

Probleem.

Schets op jouw GRM de grafiek van de functie f met als voorschrift $y = f(x) = x^3$.

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P(1,1) via DRAW-5:Tangent(..

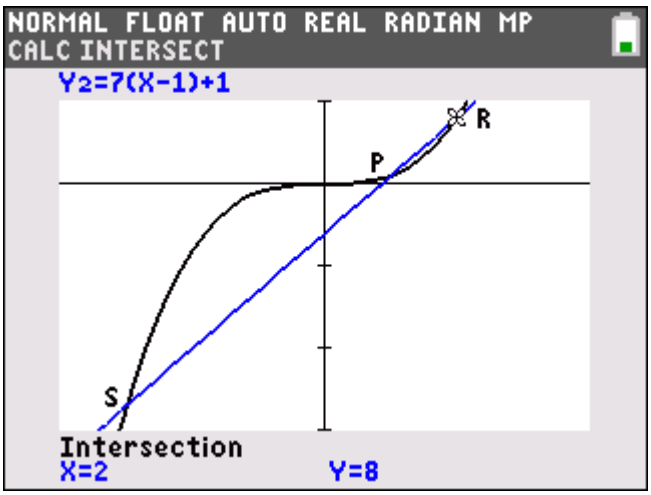
Teken een willekeurige andere rechte door het punt P(1,1) die de grafiek van f snijdt in twee andere punten R en S.

Voor welke waarden van de richtingscoëfficiënt m van die rechte zijn er twee verschillende snijpunten met de grafiek van f?

Bepaal met behulp van jouw GRM de abscis (x-coördinaat) van het midden M van het lijnstuk [R,S].

Herhaal deze werkwijze voor een andere rechte door het punt P(1,1) die eveneens twee snijpunten heeft met de grafiek van f. Wat stel je vast?

Kan je dit nu ook via manueel rekenwerk aantonen?



Op dit voorbeeld is de rechte $y - 1 = 7(x - 1)$ door P(1,1) gekozen.
Eén van de snijpunten blijkt het punt R(2,8) te zijn.

5 MIDDENIN GERAAKT

De derdegraadsfunctie f met als voorschrift

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

heeft als nulpunten P(-1,0), Q(1,0) en R(3,0). Controleer dit met jouw GRM via een tabel van functiewaarden.

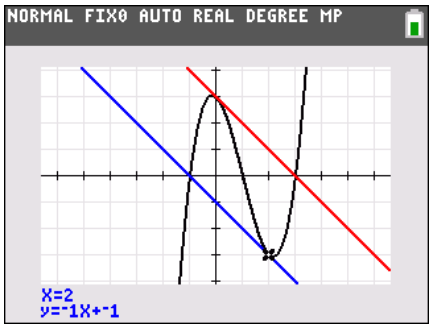
Beweringen:

(1) als M_1 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [P,Q], dan bevat de raaklijn in M_1 aan de grafiek van f het punt R;

(2) als M_2 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [Q,R], dan bevat de raaklijn in M_2 aan de grafiek van f het punt P;

(3) als M_3 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [P,R], dan bevat de raaklijn in M_3 aan de grafiek van f het punt Q. Deze laatste bewering is evident, aangezien de absciswaarde van M_3 gelijk is aan 1 en dit is precies de absciswaarde van het punt Q.

Controleer de beweringen (1) en (2) met jouw GRM via de instructie DRAW-5:Tangent(.



<u>Probleem.</u>

Bepaal het functievoorschrift van de derdegraadsfunctie met nulpunten A(-1,0), B(2,0) en C(6,0) die het punt D(0,18) bevat.
Bepaal met jouw GRM de vergelijking van de raaklijnen in de punten op de grafiek die dezelfde absciswaarde hebben als de middens van de lijnstukken [A,B], [B,C] en [A,C]. Ga na dat elk van deze raaklijnen door een nulpunt gaat van de functie f.

Het is een uitdagende opgave om aan te tonen dat de bovenstaande eigenschap in het algemeen geldt voor een functie f van de derde graad met louter reële nulwaarden.

Het algebraïsch rekenwerk kan als volgt verlopen. Verschuif de grafiek in de horizontale richting zodat een nulpunt samenvalt met de oorsprong. Om bovendien breuken te vermijden kunnen we aannemen dat het functievoorschrift van f er als volgt uitziet:

$$f(x) = kx(x - 2a)(x - 2b) = k[x^3 - 2(a + b)x^2 + 4abx].$$

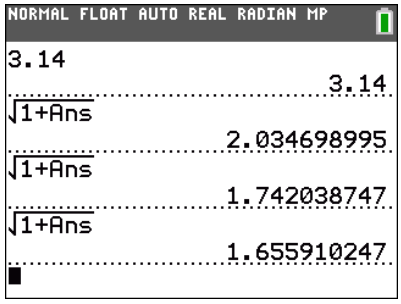
Het volstaat nu aan te tonen dat de raaklijn aan de grafiek in M(a + b, f(a + b)) door de oorsprong gaat. Werk dit verder uit.

6 PHI EN BUIGPUNTEN

Het getal van de gulden snede is $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$.

Dit getal staat o.a. in verband met de rij van Fibonacci en een aantal andere problemen (zie bv. op http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi.html).

Met een grafisch rekentoestel kan je het getal als volgt benaderen via een convergente rij getallen:



1. Tik een willekeurig reëel getal r in groter dan -1. Druk op ENTER.
2. Neem nu de vierkantswortel uit 1 + r via $\sqrt{1+Ans}$.
3. Herhaal deze instructie door telkens op de ENTER-toets te drukken.

Kan je verklaren waarom je zo een rij getallen opbouwt die convergeert naar ϕ ?

We bestuderen nu een merkwaardige vierdegraadsfunctie waarbij het getal ϕ op een verrassende manier opduikt.

<u>Probleem 1.</u>

1. Teken op jouw GRM de grafiek van de functie f met als voorschrift

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

2. Toon aan via de tweede afgeleide van f dat A(0,-1) en B(1,0) de twee buigpunten zijn op de grafiek van f.

3. Bepaal met de GRM de twee snijpunten P en Q van de rechte AB met de grafiek van f.

   Als $x_P < x_A < x_B < x_Q$, toon dan aan dat

$$\frac{x_B - x_A}{x_A - x_P} = \frac{x_B - x_A}{x_Q - x_B} = \phi \ .$$

   Als $y_P < y_A < y_B < y_Q$, toon dan aan dat

$$\frac{y_B - y_A}{y_A - y_P} = \frac{y_B - y_A}{y_Q - y_B} = \phi \ .$$

4. Ga na dat $co(P) = \phi\, co(A) + (1-\phi)\, co(B)$ en $co(Q) = (1-\phi)\, co(A) + \phi\, co(B)$.

<u>Probleem 2.</u>

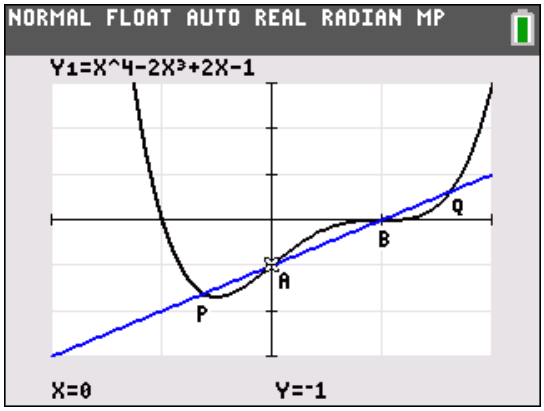
Ga na of de bovenstaande resultaten ook geldig zijn bij de vierdegraadsfunctie g met als functievoorschrift $g(x) = x^4 - 6x^2 + 5x$.

7 DUBBELE OPPERVLAKTE

We beschouwen de vierdegraadsfunctie met als voorschrift

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

Toon via algebraïsch rekenwerk aan dat de punten A(0,-1) en B(1,0) de twee buigpunten zijn op de grafiek van f . De rechte AB heeft als vergelijking y = g(x) = x – 1 en snijdt de grafiek van f in de punten P en Q.



Probleem 1.

Toon aan met behulp van de GRM dat

(1) de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en de rechte AB tussen de punten P en A gelijk is aan de oppervlakte tussen beide grafieken tussen de punten B en Q;
(2) de oppervlakte het gebied tussen de grafiek van f en de rechte AB tussen de punten A en B het dubbele is van de oppervlakte tussen beide grafieken tussen de punten P en A.

Stappenplan.

1. Tik het voorschrift in van de functie f (Y_1) en van de rechte AB (Y_2).
2. Schets de grafiek van f en de rechte AB in een passend venster.
3. Bepaal het snijpunt P en bewaar de x-coördinaat van P als de letterwaarde P.
4. Bepaal het snijpunt Q en bewaar de x-coördinaat van Q als de letterwaarde Q.
5. Bereken de oppervlakte van de drie gebieden tussen beide grafieken via MATH 9:fnInt(.

Probleem 2.

Ga na of de bovenstaande resultaten ook geldig zijn bij de vierdegraadsfunctie g met als functievoorschrift

$$g(x) = x^4 - 6x^2 + 5x.$$

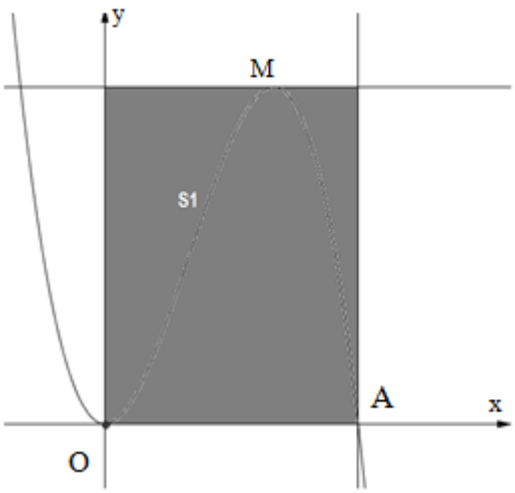
8 CONSTANTE VERHOUDING VAN OPPERVLAKTEN

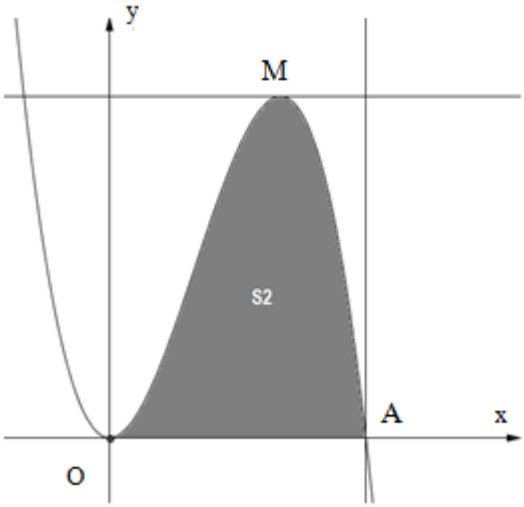
Probleem 1.
Beschouw de familie functies van de derde graad met als voorschrift

$$f(x) = ax^2 - x^3, \quad \text{met } a > 0.$$

Voer nu de volgende activiteiten uit met behulp van jouw GRM.

1. Kies een willekeurige positieve waarde voor a.
2. Schets de grafiek van de functie f in een passend venster. Deze grafiek heeft twee punten gemeen met de x-as: O(0,0) en het punt A.
3. Bepaal de coördinaat van A.
4. Bepaal de coördinaat van het maximum M op de grafiek van f.
5. Bereken de oppervlakte S_1 van de rechthoek begrensd door de x-as, de y-as, de horizontale rechte door M en de verticale rechte door A.
6. Bereken de oppervlakte S_2 tussen de grafiek van f en de x-as vanaf O tot A.
7. Bepaal de verhouding $\frac{S_1}{S_2}$.





Herhaal deze werkwijze met een andere waarde van a en bereken opnieuw $\frac{S_1}{S_2}$.
Wat stel je vast?

Probleem 2.
Beschouw de familie functies van de vierde graad met als voorschrift

$$f(x) = ax^3 - x^4, \quad \text{met } a > 0.$$

Definieer op dezelfde manier als hierboven de oppervlakten S_1 en S_2 en bereken opnieuw de verhouding $\frac{S_1}{S_2}$. Wat stel je vast?

Uitdaging.
Veralgemeen dit resultaat via algebraïsch rekenwerk voor de functies van graad n met als voorschrift

$$f(x) = ax^{n-1} - x^n, \quad \text{met } a > 0 \text{ en n een natuurlijk getal groter dan 1.}$$

9 DE ONTPLOFTE VUURPIJL

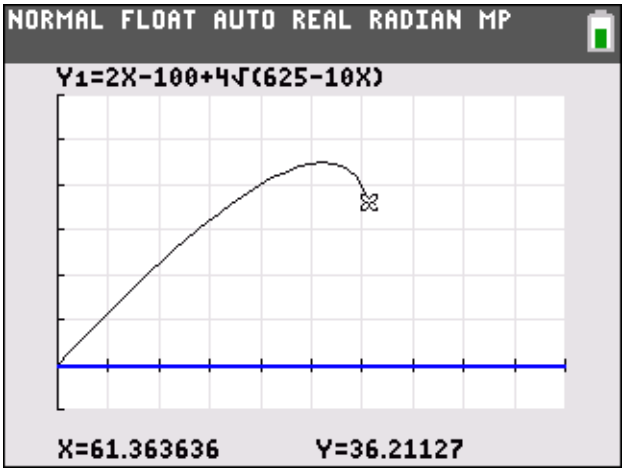
Probleem.

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten en beschrijft een baan met als vergelijking

$$y = 2x - 100 + 4\sqrt{625 - 10x} \ .$$

Tik dit functievoorschrift in op jouw GRM en schets de baan van de vuurpijl in een passend venster. Bepaal via de tabel met functiewaarden of via de instructie CALC-4:maximum de hoogste positie van het projectiel. Bepaal via de tabel met functiewaarden ook de positie waarop de vuurpijl ontploft.

Wordt de baan helemaal getekend op het scherm?



Bijkomende problemen.

1. Bepaal het hoogste punt van de baan via algebraïsch rekenwerk.
2. Bepaal via algebraïsch rekenwerk op welke positie de vuurpijl ontploft.
3. Bepaal met behulp van jouw GRM de twee posities waarbij de vuurpijl zich op een hoogte van 40 meter bevindt. Bepaal die posities daarna ook via algebraïsch rekenwerk.
4. Onder welke hoek met de horizontale richting werd de vuurpijl afgeschoten? Bepaal de hoek met behulp van de GRM (DRAW-5:Tangent( ) en via de eerste afgeleide.

10 RAAKLIJN EN ASSEGMENTEN

Beschouw de verzameling punten gedefinieerd door het voorschrift

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \qquad (*)$$

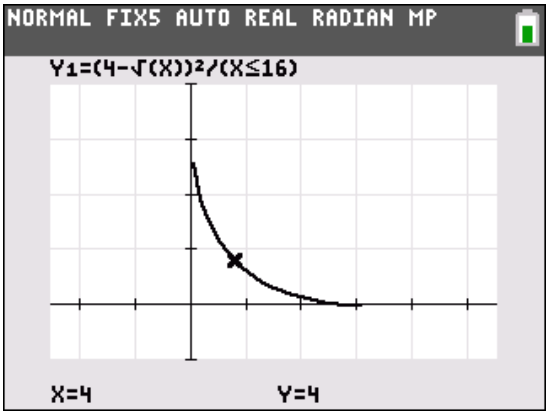
Om de grafiek hiervan te tekenen op een GRM hebben we een expliciet functievoorschrift nodig.

Kan je verklaren waarom het voorschrift

$$y = (4 - \sqrt{x})^2$$

niet dezelfde puntenverzameling oplevert als (*)?

Op de onderstaande schermafdruk zie je hoe je de gewenste beperking kunt inbouwen in het functievoorschrift voor een GRM. Tik het voorschrift in en schets de grafiek op jouw GRM.



Bepaal dan via de instructie DRAW – 5:Tangent(de raaklijn aan deze kromme in de punten met absciswaarde 1, 4 en 9.

<u>Problemen.</u>

1. Bepaal voor elk van deze raaklijnen via algebraïsch rekenwerk het snijpunt P met de x-as en het snijpunt Q met de y-as. De lijnstukken [OP] en [OQ] zijn de zogenaamde assegmenten. Bereken telkens |OP| + |OQ|. Wat stel je vast?

2. Bewijs via algebraïsch rekenwerk dat |OP| + |OQ| = 16 wanneer P en Q de snijpunten zijn met de coördinaatassen van de raaklijn in een willekeurig punt R(a,b) op de grafiek van (*).

3. Onderzoek of dezelfde eigenschap geldt voor de raaklijn in een willekeurig punt aan de grafiek van
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6.$$

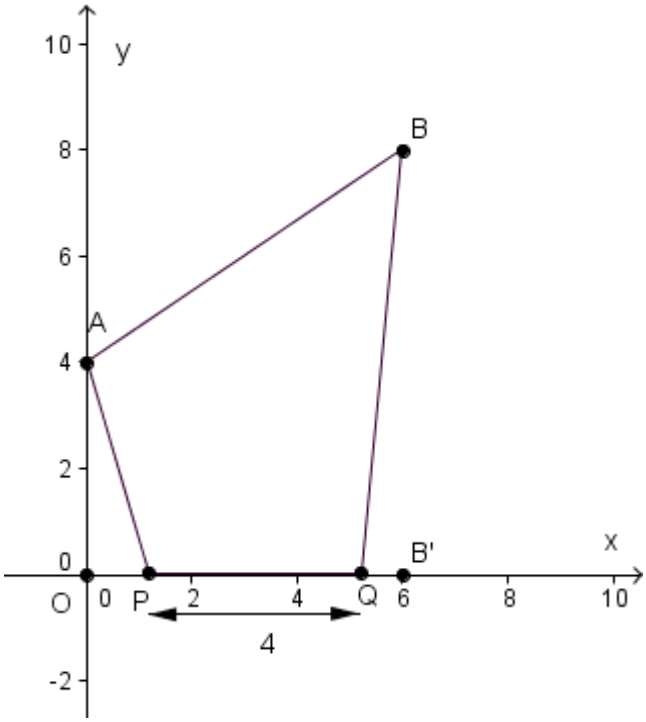
11 SCHUIFPROBLEEM

Probleem.

De punten A(0,4) en B(6,8) zijn vast.
De punten P en Q liggen op de x-as
en het lijnstuk [PQ] heeft een vaste lengte 4.

Waar moet men het punt P kiezen
opdat de omtrek van de vierhoek ABQP
zo klein mogelijk zou zijn?

Bepaal voor die positie van P de hoeken
$A\widehat{P}O$ en $B\widehat{Q}B'$ (met B' = (6,0)).



Stappenplan voor de oplossing van het extremumvraagstuk.

1. Toon aan dat met A(0,4), B(6,8), P(x,0) en Q(x+4,0) de omtrek van de vierhoek ABQP bepaald is door

$$p(x) = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{(2 - x)^2 + 64} + 4 + \sqrt{52}\,.$$

2. Tik het functievoorschrift in en schets de grafiek in een passend venster. Bepaal het minimum op de grafiek via CALC 3:mimimum. Bepaal de x-waarde waarvoor het minimum wordt bereikt ook via algebraïsch rekenwerk.

3. Bepaal hiermee de hoeken $A\widehat{P}O$ en $B\widehat{Q}B'$.

4. Toon aan dat uit p'(x) = 0 volgt dat $A\widehat{P}O = B\widehat{Q}B'$.

Opmerking.
Voor dit vraagstuk is er ook een eenvoudige oplossing 'op zicht'. Noem A'(0,-4) het spiegelbeeld van het punt A t.o.v. de rechte PQ en verschuif het punt B horizontaal naar het punt B"(2,8). Dan is |B"P| + |A'P| = |BQ| + |AP|. Hieruit volgt dat de omtrek van de vierhoek ABQP minimaal is als |B"P| + |A'P| minimaal is. Hieraan is voldaan als de punten B", P en A' op één rechte lijn liggen. Een schets maakt dan direct duidelijk waarom $A\widehat{P}O = B\widehat{Q}B'$.

12 GEWICHTSTOENAME BIJ EEN ZWANGERE VROUW

Een gynaecoloog heeft bij een vrouw tijdens haar zwangerschap de toename van haar lichaamsgewicht bijgehouden en ook de evolutie van het gewicht van haar ongeboren baby.
De resultaten staan in de onderstaande tabel.

Aantal weken zwanger	15	25	35	40
Toename van het lichaamsgewicht van de zwangere vrouw (in gram)	1540	3050	6010	8450
Gewicht van de ongeboren baby (in gram)	525	1395	3130	4010

Voer deze gegevens in op jouw GRM in de lijsten L_1, L_2 en L_3 (via STAT-EDIT-1:Edit…).

<u>Probleem 1.</u>

1. Ga na dat het verband tussen het aantal weken zwangerschap en de gewichtstoename van deze vrouw vanaf de vijftiende week bij benadering exponentieel is.

   Bepaal via STAT-CALC-0:ExpReg het voorschrift voor deze exponentiële functie.
   Bewaar het functievoorschrift onder Y_1.
   Teken de grafiek (ZOOM-9:ZoomStat) en lees hierop de gewichtstoename af van de zwangere vrouw wanneer ze dertig weken zwanger was.

2. Ga na dat de formule $F(t) = at + b$ bij benadering het verband weergeeft tussen het gewicht van de foetus en de duur van de zwangerschap. Hierbij is t de tijd in weken dat de vrouw zwanger is en F is het gewicht van de foetus (in gram).

   Bepaal via STAT-CALC-8:LinReg(ax+b) het voorschrift voor de functie F.
   Bewaar het functievoorschrift onder Y_2.
   Teken de grafiek (ZOOM-9:ZoomStat) en lees hierop het gewicht af van de foetus wanneer de vrouw 30 weken zwanger was.

In de bovenstaande tabel kan je zien dat op het einde van de zwangerschap de gewichtstoename van de vrouw meer dan het dubbele bedraagt van het gewicht van haar ongeboren baby. Dit is te verklaren door het feit dat er veel vruchtwater is opgeslagen en ook door weefselvorming rond de foetus.

<u>Probleem 2.</u>

1. In de hoeveelste week van de zwangerschap is de lichaamstoename van de vrouw het dubbele van het gewicht van de foetus?
   Tip: STAT PLOT-4:PlotsOff. Stel $Y_3 = Y_1 - Y_2$. Bepaal de snijpunten van de grafieken van Y_2 en Y_3.

2. Na hoeveel weken nemen de gewichtstoename van de vrouw en het gewicht van het ongeboren kind even snel toe?
   Tip: bepaal het minimum op de grafiek van Y_3.

13 HET GETAL VAN EULER

Het getal *e* is een belangrijke wiskundige constante en is het grondtal voor de natuurlijke logaritmen (ln = logaritmus naturalis).

$$e = 2{,}718281828459...$$

De best gekende formules waarmee e kan berekend worden zijn

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$$

en

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to 0} \left[(n+1)^{\frac{1}{n}}\right] .$$

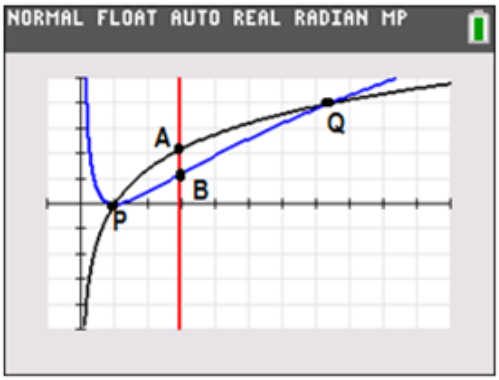
<u>Probleem 1.</u>
Beschouw de functies f en g gedefinieerd door het voorschrift

$$f(x) = 2 \ln x \quad \text{en} \quad g(x) = (\ln x)^2 .$$

Schets de grafiek van beide functies in een passend venster.
Bepaal de twee snijpunten P en Q van beide grafieken via de GRM en via algebraïsch rekenwerk.

Een verticale rechte x = a snijdt tussen P en Q de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
Bepaal via de GRM de waarde van a waarvoor de lengte van het lijnstuk [AB] maximaal is.
Hoe lang is het lijnstuk [AB] dan?
Schets hiervoor de verschilfunctie v bepaald door het voorschrift $v(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$ en gebruik de instructie CALCULATE – 4:maximum.

Bepaal deze waarde daarna ook via manueel rekenwerk.

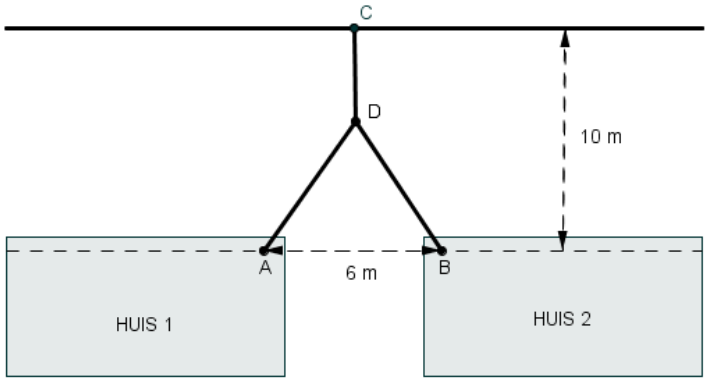


<u>Probleem 2.</u>
Men kan ook de grafieken van de functies f en g tussen de punten P en Q snijden met een horizontale rechte y = b. Noem de snijpunten C en D en bepaal met de GRM de maximale lengte van het lijnstuk [CD]. Kan je dit probleem ook via algebraïsch rekenwerk oplossen?

14 DE IDEALE GASAANSLUITING

Probleem.

In een nieuwe wijk moeten twee huizen aangesloten worden aan het gasnet. Vanuit een punt C op de hoofdleiding besluit men de verbinding te maken naar de punten A en B in de twee huizen. Hierbij is driehoek ABC een gelijkbenige driehoek. De afstand van A tot B bedraagt 6 meter en de hoofdleiding loopt evenwijdig met AB en op een afstand van 10 meter van de rechte lijn door A en B.



De technicus besluit vanuit het punt C eerst een verbindingsstuk aan te brengen loodrecht op de hoofdleiding en dan vanuit een punt D vertakkingen aan te brengen naar A en B, waarbij |DA| = |DB|. Waar moet het punt D gekozen worden opdat de totale lengte van de verbindingsleidingen zo klein mogelijk zou zijn?

Eerste oplossingswijze.

Stel $D\widehat{A}B = \alpha$ en toon aan dat de lengte van het verbindingstraject vanuit C via D naar de punten A en B bepaald is door de formule

$$L(\alpha) = \frac{6}{\cos\alpha} - 3\tan\alpha + 10.$$

Tussen welke waarden kan α variëren?

Schets de grafiek van de functie L in een passend venster (MODE RADIAN) en bepaal hierop het minimum. Druk de hoek waarvoor het minimum wordt bereikt ook uit in zestigdelige graden.
Hoe lang is dan het stuk van C tot D?
En hoe lang is het totale verbindingstraject dan?

Bepaal daarna de waarde van de hoek α door de nulwaarde van de afgeleide van de functie L te berekenen.

Tweede oplossingswijze.

Stel |CD| = x en toon aan dat de lengte van het verbindingstraject vanuit C via D naar de punten A en B bepaald is door de formule

$$L(x) = x + 2\sqrt{109 - 20x + x^2}\,.$$

Tussen welke waarden kan x variëren?

Schets de grafiek in een passend venster en bepaal hierop de minimale waarde voor |CD| en voor het totale traject.

Uitdaging.
Welke andere keuze voor de variabele kan je hier maken? Werk het probleem uit voor die andere keuze.

15 DE BEWAKINGSCAMERA BOVEN DE STADSPOORT

Probleem 1.

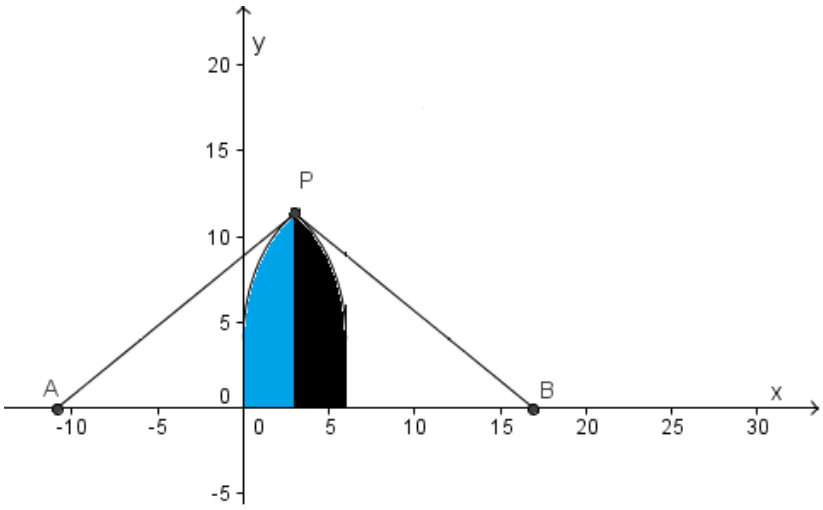
Een stadspoort heeft twee deuren die symmetrisch zijn ten opzichte van elkaar. De bovenrand van de rechtse deur is bepaald door het functievoorschrift

$$f(x) = \sqrt{72 - 2x^2} + 4 \quad , \quad \text{met } 3 \leq x \leq 6.$$

De afmetingen zijn uitgedrukt in meter.

1. Bepaal het functievoorschrift van de functie g voor de bovenrand van de linkse deur.
2. Als in het midden P net boven de twee deuren een bewakingscamera is aangebracht die het gebied kan waarnemen onder de raaklijnen aan beide deuren, hoe groot is dan de afstand tussen de punten A en B (zie onderstaande figuur) ?

   Schets de grafiek van f en g in een passend venster.
   Schets daarna ook de twee raaklijnen in P (via DRAW – 5: Tangent( ) en bepaal via de vergelijking ervan de afstand tussen de punten A en B, die het bereik van de bewakingscamera bepalen.
3. Bereken met de GRM de oppervlakte van beide deuren. Kan je die bepaalde integraal ook via algebraïsch rekenwerk berekenen?



Probleem 2.

Een poort heeft twee deuren die symmetrisch zijn ten opzichte van elkaar. De bovenrand van de rechtse deur is bepaald door het functievoorschrift

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad \text{met } 2{,}5 \leq x \leq 5.$$

De afmetingen zijn uitgedrukt in meter.

Bepaal het functievoorschrift voor de bovenrand van de linkse deur.
Schets de grafiek in een passend venster en bereken de oppervlakte van de beide deuren.

16 GROEI VAN ZONNEBLOEMEN

Zonnebloemen zijn snelgroeiende planten die worden geteeld voor de productie van olie. In twee verschillende gebieden in Zuid-Frankrijk heeft men metingen verricht waarbij gedurende 20 weken de lengte van de zonnebloemen werd opgemeten. Aan de hand van de metingen heeft men dan een wiskundig model opgesteld waarbij telkens het groeiproces grafisch werd voorgesteld. Dit resulteerde in de volgende twee modellen.

MODEL 1.
Via een recursiebetrekking wordt de lengte L(n) (in cm) van de zonnebloemen op het einde van de n-de week uitgedrukt in functie van de lengte L(n – 1) op het einde van de vorige week:

$$L(n) = L(n-1) + 0{,}84L(n-1)\left(1 - \frac{L(n-1)}{290}\right), \quad \text{met } L(1) = 1.$$

Tik dit voorschrift in op jouw GRM (MODE SEQUENCE voor rijen), stel een tabel op met de waarden van deze rij en plot de punten in een passend venster (aantal weken op de horizontale as en lengte op de verticale as). Hoe lang worden de zonnebloemen uiteindelijk?

Na 10 weken blijken de zonnebloemen een lengte van ongeveer 1,60 m bereikt te hebben en in die periode verliep de groei nagenoeg exponentieel.

Neem de waarden van de lengte van de zonnebloemen uit de tabel over in de lijsten L_1 en L_2 en bepaal de passende exponentiële groeifunctie met een voorschrift van de vorm $L(t) = a \cdot b^t$ via STAT-CALC-0:ExpReg. Schrijf dit voorschrift daarna ook onder de vorm $L(t) = a \cdot e^{bt}$.

Zet de GRM terug in de MODE FUNCTION en plot de punten en de grafiek van de bijhorende exponentiële functie (die is opgeslagen onder Y_1) in een passend venster.

MODEL 2.
In de andere regio gebruikt men als model een zogenaamde logistische groeifunctie:

$$L(t) = \frac{290}{1 + 289 \cdot 0{,}55^{t-1}}$$

waarbij L de lengte is van de zonnebloemen (in cm) en t de tijd in weken.
Tik dit functievoorschrift in onder Y_2 en schets de grafiek in een passend venster.
Hoe lang worden de zonnebloemen uiteindelijk volgens dit model?

Na 10 weken blijken de zonnebloemen een lengte van ongeveer 1,60 m bereikt te hebben en in die periode verliep de groei nagenoeg exponentieel.

Neem de waarden van de lengte van de zonnebloemen uit de tabel over in de lijst L_3 en bepaal de passende exponentiële groeifunctie met een voorschrift van de vorm $L(t) = a \cdot b^t$ via STAT-CALC-0:ExpReg. Schrijf dit voorschrift daarna ook onder de vorm $L(t) = a \cdot e^{bt}$.

Plot de punten en de grafiek van de bijhorende exponentiële functie (die is opgeslagen onder Y_3) in een passend venster.

17 DE VERKOOP VAN CHOCOPASTA

Probleem 1.

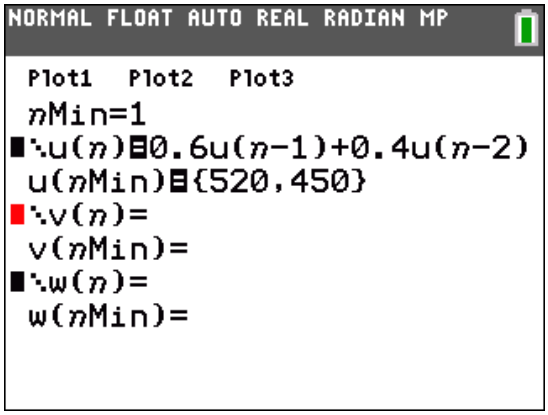
Het grootwarenhuis Allfoods verkoopt chocopasta van het merk Nutina. Aan het einde van elke maand koopt het warenhuis een aantal potten chocopasta aan bij de groothandel. De verantwoordelijke van de aankoopdienst moet dan telkens een schatting maken van het aantal potten dat de volgende maand zal verkocht worden. Hij hanteert hierbij de volgende regel: tel het aantal potten dat twee maanden geleden werd verkocht mee voor 40 % en het aantal potten dat de afgelopen maand is verkocht voor 60 %:

$$P_{n+2} = 0{,}6\, P_{n+1} + 0{,}4\, P_n\,. \quad (*)$$

Als in de maand januari 450 potten werden verkocht ($P_1 = 450$) en in de maand februari 520 potten ($P_2 = 520$), hoe zal de verkoop dan in de overige 10 maanden van dat jaar evolueren overeenkomstig de gehanteerde regel (*) ? We nemen hierbij aan dat alle potten die worden aangekocht telkens ook worden verkocht.

Werkwijze.

Zet de GRM in MODE SEQUENCE (rijen) en tik bij u(n) het passende voorschrift in.
Tik bij u(nMin) de beginwaarden in. Stel een tabel op met de rij-waarden.



Blijkbaar stabiliseert de verkoop. Hoeveel potten Nutina zal Allfoods dan uiteindelijk maandelijks aankopen?

Probleem 2.

Ook het warenhuis Supershop koopt elke maand een aantal potten Nutina aan. De verantwoordelijke van de aankoopdienst neemt voor de bestelling telkens het gemiddelde van het aantal verkochte potten van de twee voorbije maanden:

$$P_{n+2} = 0{,}5\, P_{n+1} + 0{,}5\, P_n\,.$$

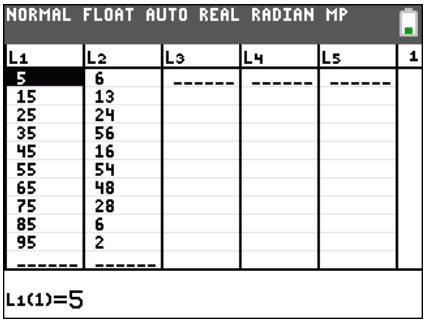
In de maand januari verkocht Supershop 110 potten Nutina en in februari 140 potten.
Werk dit voorbeeld op een analoge manier uit als hierboven. Op hoeveel potten stabiliseert de verkoop?

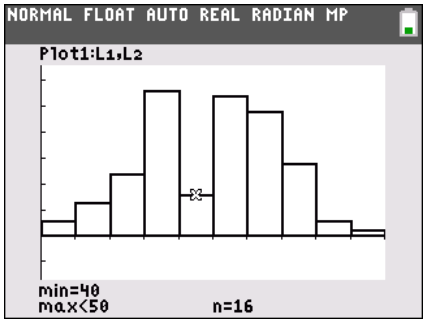
18 DE GEMANIPULEERDE EXAMENRESULTATEN

Probleem.
In de onderstaande tabel staan de resultaten van een tentamen wiskunde voor de 253 eerstejaarsstudenten industrieel ingenieur.

Score (%)	Aantal studenten
0-9	6
10-19	13
20-29	24
30-39	56
40-49	16
50-59	54
60-69	48
70-79	28
80-89	6
90-99	2

1. Voer de gegevens in de GRM in de lijsten L_1 (klassenmiddens) en L_2 (absolute frequenties). Plot een histogram via STAT PLOT. Gebruik de optie ZOOM-0:ZoomStat en pas daarna de vensterinstellingen manueel aan (Xmin = 0, Xmax = 100, Xscl = 10).





2. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking via STAT-CALC-1:1-Var Stats.

3. Als men het histogram bekijkt dan valt het op dat er weinig studenten een score behaalden tussen 40 % en 50 %. Men mag immers verwachten dat de cijfers normaal verdeeld zouden zijn.

   Volgens het departementshoofd waren de cijfers gemanipuleerd omdat studenten die op het tentamen een score behalen tussen 40 % en 50 % extra begeleiding moeten krijgen van de docenten. Bereken met behulp van een normale verdeling met gemiddelde 49 en standaardafwijking 19,6 hoeveel studenten een score tussen 40 % en 50 % zouden moeten gekregen hebben. Gebruik hiervoor de opdracht DISTR-2:normalcdf.

Slotbemerking.
Nadat het examen opnieuw werd verbeterd door andere correctoren bleek dat 22 studenten die eerder een score behaalden tussen 30% en 40 % nu een cijfer tussen 40 % en 50 % behaalden. En ook 8 studenten met een score tussen 50 % en 60 % bleken nu een cijfer te behalen tussen 40 % en 50 %.

19 SEVEN UP

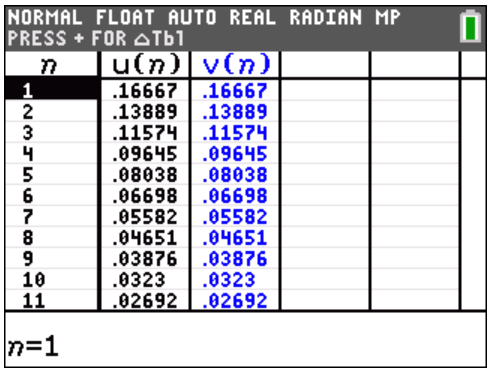
‘SEVEN UP’ is een spelletje met twee dobbelstenen dat vroeger in Ierse pubs werd gespeeld. De deelnemers gooien om de beurt met twee dobbelstenen. Als een speler als som van de ogen van beide dobbelstenen zeven gooit, roept hij ‘SEVEN UP’ en valt meteen af, d.w.z. dan moet hij niet meer verder meespelen. Wie als laatste overblijft betaalt een rondje voor alle deelnemers.

In de onderstaande tabel staan de kansen vermeld om voor het eerst bij de eerste, tweede, derde en vierde worp ‘SEVEN UP’ (= voor de eerste keer als som van de ogen zeven) te gooien.

Aantal worpen n	1	2	3	4
Kans P_n op ‘SEVEN UP’	16,67 %	13,89 %	11,57 %	9,65 %

1. Hoe groot is de kans om pas bij de vijfde worp voor het eerst ‘SEVEN UP’ te gooien?

2. Geef de recursieve en de expliciete formule om de kans te berekenen om bij de n-de worp voor de eerste keer ‘SEVEN UP’ te gooien. Voer de beide formules in op de GRM (MODE SEQUENCE voor rijen) en stel een tabel op met de kansen.



3. De verwachtingswaarde E van het aantal worpen dat nodig is om voor de eerste keer ‘SEVEN UP’ te gooien kan men berekenen met de volgende (oneindige) som:

$$E = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_n + \ldots + n \cdot P_n + \ldots$$

Met behulp van de GRM kan je hiervoor de benadering S_n bepalen door te stoppen na n termen:

$$S_n = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_n + \ldots + n \cdot P_n .$$

Bereken met de GRM S_{20}. Gebruik de volgende instructies: LIST-MATH-5:sum en LIST-OPS-5:seq(.

Bereken met de GRM ook S_{30} en S_{40}. Naar welke waarde blijkt de rij getallen S_n te convergeren? Kan je dit ook wiskundig verklaren?

20 FIBONACCI EN PELL

Probleem 1. RIJ VAN FIBONACCI

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

De getallen uit de rij van Fibonacci kan men op verschillende manieren genereren op een GRM. Dit kan via een recursief voorschrift

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \text{met } u_1 = u_2 = 1$$

of via een expliciet voorschrift via de formule van Binet:

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Het onderstaande programma plaatst de eerste 20 Fibonaccigetallen in de lijst L_1.

```
PROGRAM:FIBO
:ClrList L1
:1 →A:1→B:A→L1(1):B→L1(2)
:For(N,3,20)
:A+B→C:C→L1(N)
:B→A:C→B
:End
```

Men kan de rij van Fibonacci op een GRM ook genereren met behulp van machten van de volgende (2 x 2) – matrix: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

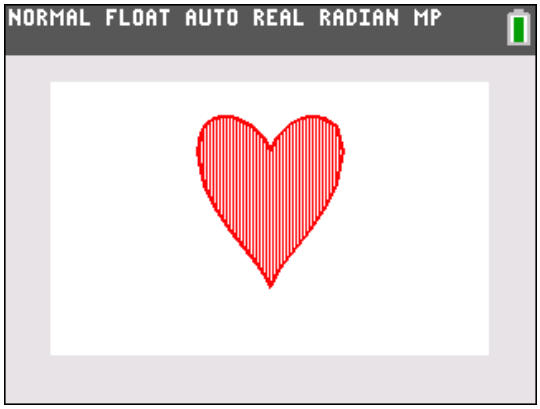
Werkwijze.

1. Tik de matrix in op de GRM via MATRIX-EDIT.
2. Vraag de matrix op via MATRIX-NAMES en druk op ENTER.
3. Vermenigvuldig de matrix A met zichzelf. Druk hiervoor op de toets met het maalteken en vraag opnieuw de matrix A op.
4. Druk daarna herhaaldelijk op ENTER. Wat stel vast? Kan je dit ook bewijzen?

Probleem 2. RIJ VAN PELL

Bepaal de opeenvolgende machten van de matrix $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Welk verband zie je met de zogenaamde rij getallen van Pell, genoemd naar de Engelse wiskundige John Pell (1611-1685)? Zoek hierover informatie op via Wikipedia of op www.gnomon.bloggen.be (zoekopdracht: Pell).



Creatie met een TI-84 Color

$Y_1 = \sqrt[3]{X^2} + \sqrt{1-X^2}$

$Y_2 = \sqrt[3]{X^2} - \sqrt{1-X^2}$

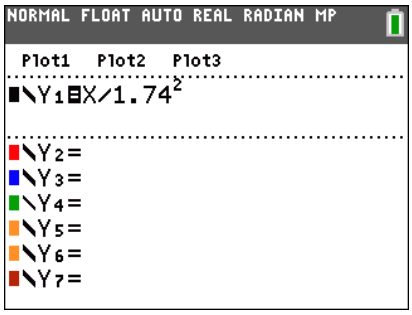
Shade(Y2,Y1,-3,3,1,1,11)

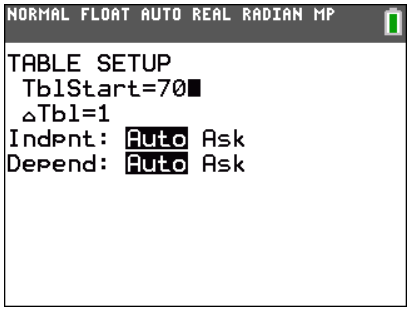
DEEL 2
DE OPLOSSINGEN

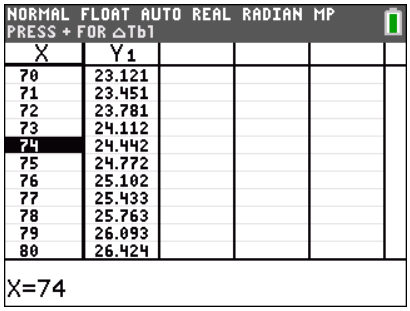
ONDERWERPEN
1. BODY MASS INDEX
2. WISSELFUNCTIES
3. BUITEN SCHOT
4. EEN VERRASSENDE SNIJLIJN
5. MIDDENIN GERAAKT
6. PHI EN BUIGPUNTEN
7. DUBBELE OPPERVLAKTE
8. CONSTANTE VERHOUDING VAN OPPERVLAKTEN
9. DE ONTPLOFTE VUURPIJL
10. RAAKLIJN EN ASSEGMENTEN
11. SCHUIFPROBLEEM
12. GEWICHTSTOENAME BIJ EEN ZWANGERE VROUW
13. HET GETAL VAN EULER
14. DE IDEALE GASAANSLUITING
15. DE BEWAKINGSCAMERA BOVEN DE STADSPOORT
16. DE GROEI VAN ZONNEBLOEMEN
17. DE VERKOOP VAN CHOCOPASTA
18. DE GEMANIPULEERDE EXAMENRESULTATEN
19. SEVEN UP
20. FIBONACCI EN PELL

1 BODY MASS INDEX

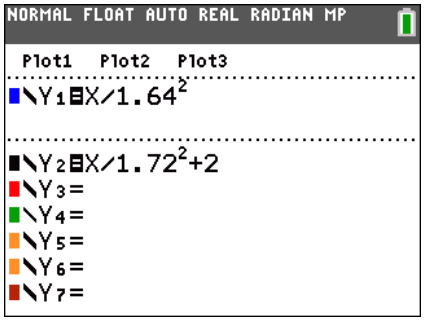
Probleem 1. Ik heb een lichaamslengte van 1,74 m. Hoe zal mijn BMI variëren als mijn gewicht verandert?

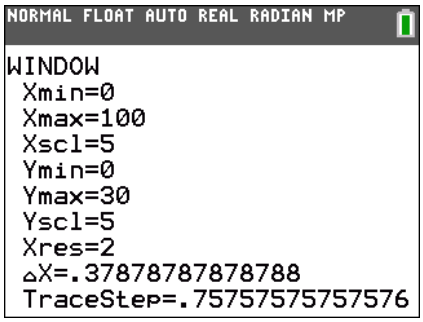


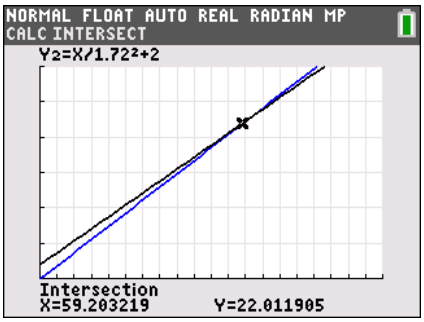




Probleem 2. Ilse en Johanna zijn resp. 1,64 m en 1,72 m groot. Ze beweren dat ze precies evenveel wegen en dat hun BMI 2 eenheden verschilt. Hoeveel bedraagt hun gewicht en hoeveel is hun BMI?

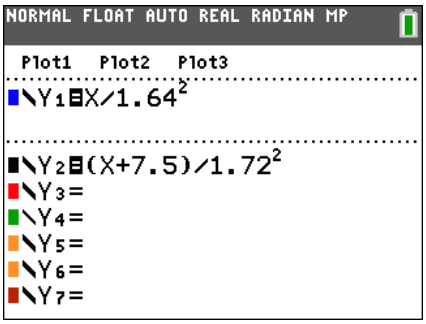


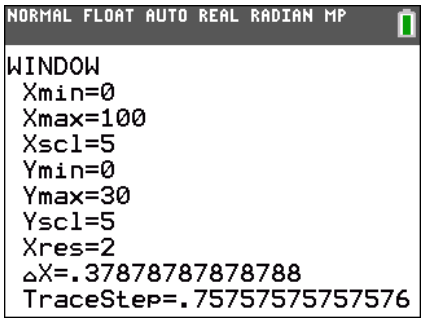


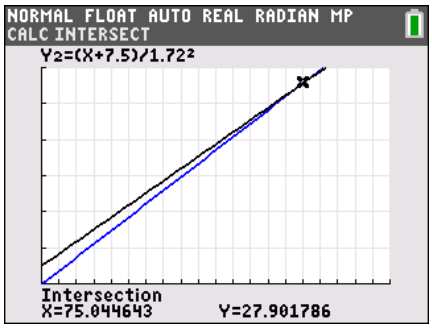


Ze wegen allebei 59,2 kg. De BMI van Ilse is 22,0 en die van Johanna is 20,0.

Probleem 3. Johannes en Lucas zijn resp. 1,72 m en 1,64 m groot en beweren dat ze dezelfde BMI hebben en dat de ene 7,5 kg meer weegt dan de andere. Hoeveel bedraagt hun BMI en hoeveel weegt elk?



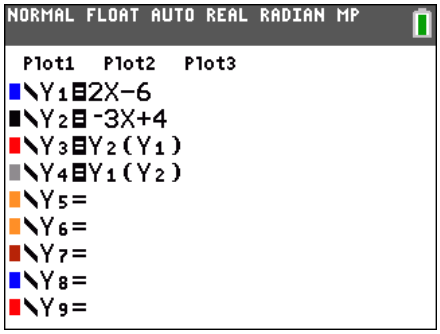


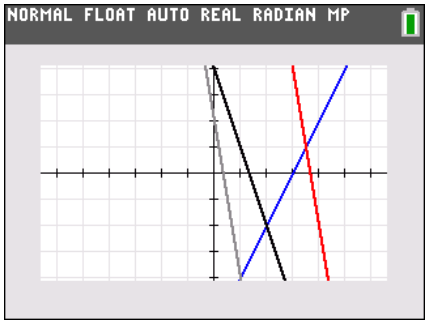


Lucas weegt ongeveer 75,0 kg en Johannes ongeveer 82,5 kg.
Hun BMI is 27,9.

2 WISSELFUNCTIES

Voorbeeld.
Stel dat f(x) = 2x – 6 en g(x) = -3x + 4.





y = (f o g)(x) = -6x + 2 en y = (g o f)(x) = -6x + 22, deze rechten hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

<u>Probleem.</u> Wanneer is g o f = f o g (m.a.w. wanneer commuteren f en g)?

Blijkbaar hebben beide functies hetzelfde voorschrift als bc + d = ad + b.

Vertrek nu eens van twee rechten die elkaar snijden op de eerste bissectrice (de rechte met als vergelijking y = x) (zie onderstaand voorbeeld). Wat stel je vast? Kan je dit ook verklaren?

Verklaring.
De eerstegraadsfuncties f en g met als voorschrift f(x) = ax + b en g(x) = cx + d (met a ≠ 0 en c ≠ 0) snijden elkaar als a ≠ c. Dan is ax + b = cx + d zodat

$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Het snijpunt ligt op de rechte met als vergelijking y = x als ax + b = x d.w.z. als

$$a\frac{d-b}{a-c} + b = \frac{d-b}{a-c}$$
$$\Updownarrow$$
$$ad - ab + ab - cb = d - b$$
$$\Updownarrow$$
$$ad + b = bc + d.$$

Dit is precies de voorwaarde opdat f en g zouden commuteren.

Opmerking. Het stelsel $\begin{cases} y = x \\ y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$ is consistent als en slechts als $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -a & 1 & b \\ -c & 1 & d \end{vmatrix} = 0$ en dit

levert dezelfde voorwaarde op.

Als g = f^{-1} dan geldt dat (f o g)(x) = (g o f)(x) = x. Dan is de ene rechte het spiegelbeeld van de andere t.o.v. de rechte met als vergelijking y = x (de eerste bissectrice).
Bij twee evenwijdige rechten met richtingscoëfficiënt 1 commuteren de corresponderende functies.

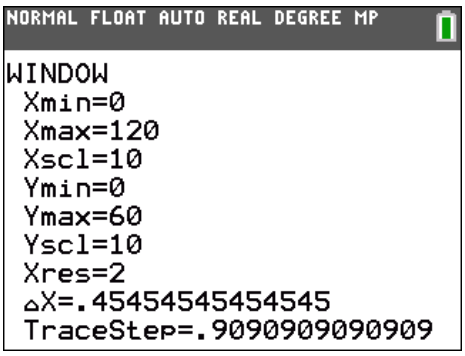
3 BUITEN SCHOT

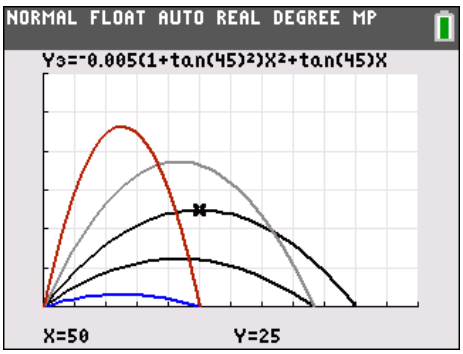
Een pijl die met een beginsnelheid v_0 (uitgedrukt in m/s) wordt afgeschoten onder een hoek α met de horizontale richting, beschrijft onder invloed van de gravitatiekracht een parabolische baan met als vergelijking

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + \tan\alpha \cdot x\,.$$

Hierbij is g de valversnelling (g = 9,81 m/s²) en wordt de luchtweerstand verwaarloosd.

Als $g/(2v_0^2) = 0{,}005$ is de beginsnelheid v_0 ongeveer 113 km/h.





<u>Probleem</u>.
We stellen vast dat er een gebied is waar geen enkele pijl kan terechtkomen, waar m.a.w. de vogels buiten schot blijven. Hoe bepaal je dit gebied?

Oplossing.

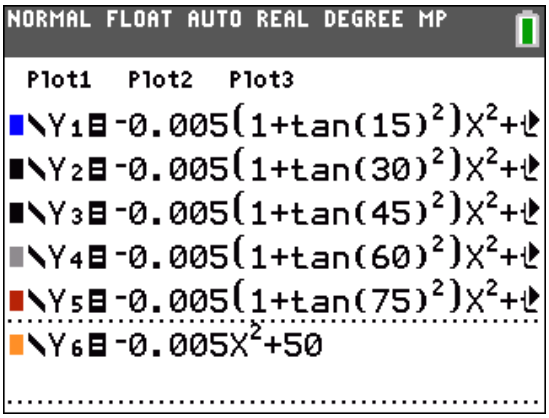
Uit de tweedegraadsvergelijking $(0{,}005x^2)\tan^2\alpha - x\tan\alpha + (0{,}005x^2 + y) = 0$ met onbekende tan α kan men afleiden door welke punten (x, y) er 2, 1 of 0 parabolen passeren, d.w.z. wanneer er respectievelijk 2, 1 of 0 hoeken α worden gevonden als oplossing.
De grenskromme, die het gebied afbakent waar de vogels buiten schot blijven, is dan de verzameling punten (x, y) waardoor er juist één parabool gaat. Door het nulstellen van de discriminant van de bovenstaande vierkantsvergelijking, vindt men als oplossing

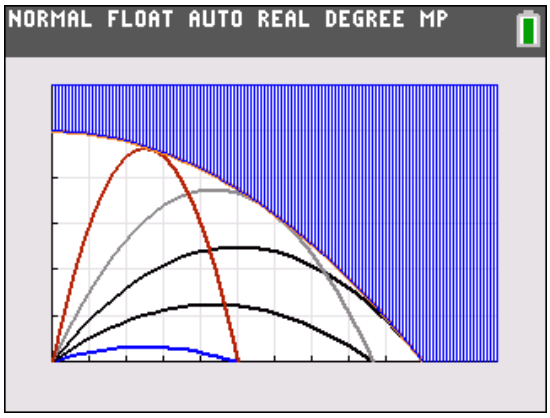
$$x = 0 \quad \text{(de y-as als } \alpha = 90°)$$

of

$$y = -0{,}005x^2 + 50.$$

Dit is de gezochte grenskromme (eveneens een parabool en dit is ook de omhullende van de familie parabolen). Schets deze kromme en arceer eventueel het gebied waar er geen pijlen terechtkomen via Shade(Y_6, 60). Hierbij is Y_6 het functievoorschrift voor de grenskromme en 60 is de gekozen waarde voor Y_{max} bij de vensterinstellingen.





Enkele vaststellingen.

1. Voor $\alpha = 45°$ raakt de pijl de grond op 100 meter van de schutter verwijderd. Is dit de correcte waarde?
   (Ja. Toon aan dat de pijl de grond raakt voor $x = 200 \sin \alpha \cos \alpha = 100 \sin 2\alpha$).

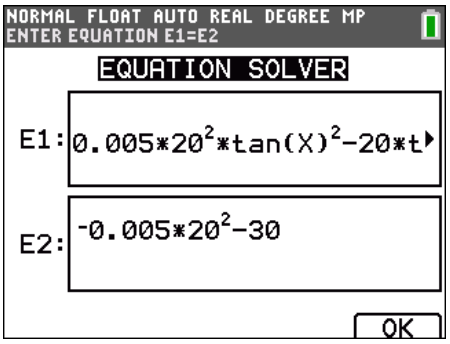
2. Waarom komt geen enkele pijl op een afstand van meer dan 100 meter van de schutter terecht?
   (De maximale waarde voor $\sin 2\alpha$ is 1).

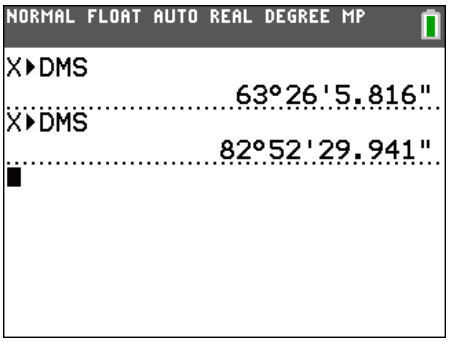
3. Een pijl wordt onder een hoek van 60° afgeschoten. Hoe ver komt hij op de grond terecht?
   (86,6 meter).

4. Een pijl komt 50 meter ver op de grond terecht. Onder welke hoek werd hij afgeschoten?
   ($\alpha = 15°$ of $\alpha = 75°$).

5. Onder welke hoek moet men de pijl afschieten om het punt te treffen op een hoogte van 30 meter en 20 meter van de schutter verwijderd (horizontaal gemeten)?
   Dit kan je oplossen met de GRM door de gebruik te maken van de Solver-instructie.

   E1 (linkerlid) : $0{,}005*20^2*\tan(X)^2 - 20*\tan(X)$
   E2 (rechterlid) : $-0{,}005*20^2 - 30$

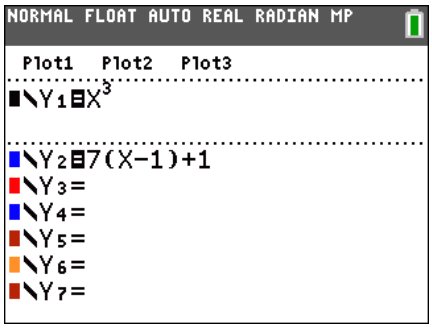


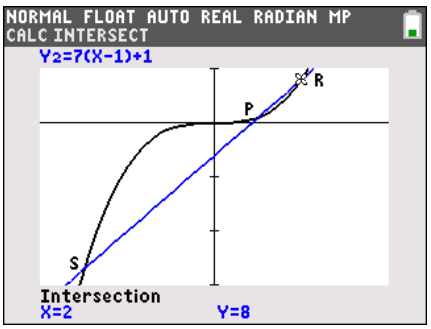


($\alpha = 63°26'6''$ of $\alpha = 82°52'30''$)

Bron: H. MULDER, Buiten schot, Euclides 66/4 (1990), 102-104.

4 DE VERRASSENDE SNIJLIJN





Op de bovenstaande schermafdrukken zie je hoe bijvoorbeeld de grafiek van de functie met als voorschrift $y = x^3$ werd gesneden met de rechte $y = 7x - 6$.

$$x^3 = 7x - 6 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0.$$

De abscissen van de snijpunten R en S verschillende van het punt P(1,1) zijn $x_R = 2$ en $x_S = -3$. De abscis van het midden M van het lijnstuk [R,S] is dan -½ .

Oplossing voor het manueel rekenwerk.

De raaklijn in P(1,1) aan de grafiek van f is de rechte met als vergelijking $y = 3x - 2$.

De abscissen van de snijpunten van een rechte $y - 1 = m(x - 1)$ door het punt P(1,1) met de grafiek van $y = x^3$, bekomt men via

$$x^3 - 1 = m(x - 1)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = m(x - 1).$$

De oplossingen verschillend van $x = 1$ voldoen aan $x^2 + x + (1 - m) = 0$.
Er zijn twee verschillende reële oplossingen als $1 - 4(1 - m) > 0$ is, d.w.z. voor $m > \frac{3}{4}$.

De som van de twee oplossingen van deze vergelijking is gelijk aan -1. Hieruit volgt dat de absciswaarde van het midden van het lijnstuk [RS] constant is (onafhankelijk van de gekozen rechte door P) en gelijk aan -½ .

Merk op dat de y-coördinaat van het midden van [RS] niet constant is en gelijk aan $1 - \frac{3}{2}m$.

5 MIDDENIN GERAAKT

De derdegraadsfunctie f met als voorschrift

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

heeft als nulpunten P(-1,0), Q(1,0) en R(3,0). Controleer dit met jouw GRM via een tabel van functiewaarden.

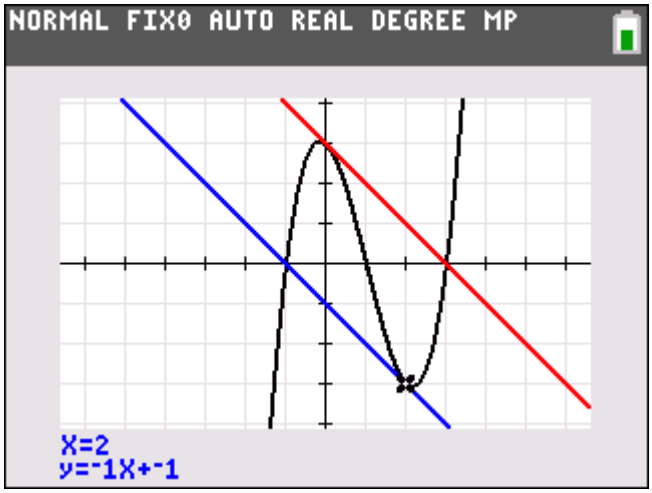
Beweringen:

(1) als M_1 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [P,Q], dan bevat de raaklijn in M_1 aan de grafiek van f het punt R;

(2) als M_2 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [Q,R], dan bevat de raaklijn in M_2 aan de grafiek van f het punt P;

(3) als M_3 het punt is op de grafiek van f met dezelfde absciswaarde als het midden van [P,R], dan bevat de raaklijn in M_3 aan de grafiek van f het punt Q. Deze laatste bewering is evident, aangezien de absciswaarde van M_3 gelijk is aan 1 en dit is precies de absciswaarde van het punt Q.

Controleer de beweringen (1) en (2) met jouw GRM via de instructie DRAW-5:Tangent(..

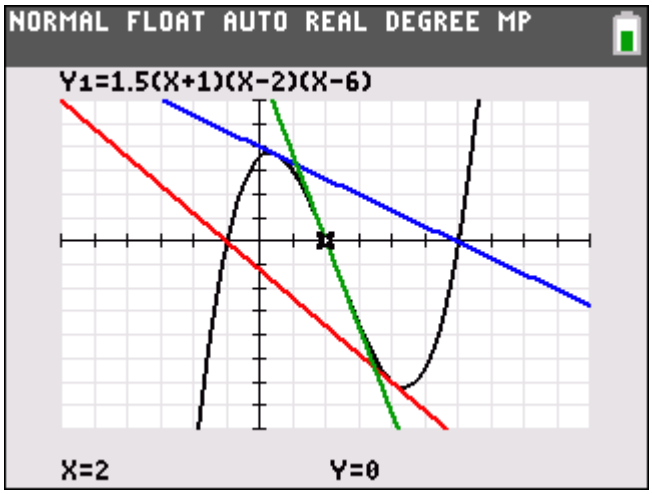


De raaklijn in M_1 bevat het punt R
en de raaklijn in M_2 bevat het punt P.

<u>Probleem.</u>

Bepaal het functievoorschrift van de derdegraadsfunctie met nulpunten A(-1,0), B(2,0) en C(6,0) die het punt D(0,18) bevat. Oplossing: $f(x) = 1{,}5(x + 1)(x - 2)(x - 6)$.

Bepaal met jouw GRM de vergelijking van de raaklijnen in de punten op de grafiek die dezelfde absciswaarde hebben als de middens van de lijnstukken [A,B], [B,C] en [A,C]. Ga na dat elk van deze raaklijnen door een nulpunt gaat van de functie f.
Dit zijn de raaklijnen: $y = -3{,}375x + 20{,}25$, $y = -6x - 6$ en $y = -18{,}375x + 36{,}75$.



Opmerking.
Het is een uitdagende opgave om aan te tonen dat de bovenstaande eigenschap in het algemeen geldt voor een functie f van de derde graad met drie verschillende reële nulwaarden.

Het algebraïsch rekenwerk kan als volgt verlopen. Verschuif de grafiek in de horizontale richting zodat die door de oorsprong gaat. Om bovendien breuken te vermijden kunnen we aannemen dat het functievoorschrift van f er als volgt uitziet:

$$f(x) = kx(x - 2a)(x - 2b) = k[x^3 - 2(a + b)x^2 + 4abx].$$

Het volstaat nu aan te tonen dat de raaklijn aan de grafiek in M(a + b, f(a + b)) door de oorsprong gaat.

Welnu,

$$f(a + b) = k[4ab(a + b) - (a + b)^3]$$
$$f'(x) = k[3x^2 - 4(a + b)x + 4ab]$$
$$f'(a + b) = k[4ab - (a + b)^2].$$

De raaklijn in M(a + b, f(a + b)) heeft dan als vergelijking

$$y - k[4ab(a + b) + (a + b)^3] = k[4ab - (a + b)^2][x - (a + b)]$$

en men verifieert gemakkelijk dat O(0,0) hierop ligt.

6 PHI EN BUIGPUNTEN

De rij getallen die convergeert naar ϕ. Hint: $\phi^2 = \phi + 1$.

We bestuderen nu een merkwaardige vierdegraadsfunctie waarbij het getal ϕ op een verrassende manier opduikt.

<u>Probleem 1.</u>

$$\mathrm{P}(1-\phi, -\phi) \text{ en } Q(\phi\,, \phi - 1)$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_A - x_P} = \frac{x_B - x_A}{x_Q - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_A - y_P} = \frac{y_B - y_A}{y_Q - y_B} = \frac{1}{\phi - 1} = \phi \quad (\text{want } \phi^2 = \phi + 1)$$

$$\phi\,\mathrm{co(A)} + \left(1 - \phi\right)\mathrm{co(B)} = \phi(0,-1) + \left(1 - \phi\right)(1{,}0) = (1-\phi, -\phi) = co(P)$$

$$\left(1 - \phi\right)co(A) + \phi\, co(B) = \left(1 - \phi\right)(0,-1) + \phi(1{,}0) = (\phi\,, \phi - 1) = co(Q).$$

<u>Probleem2 .</u>

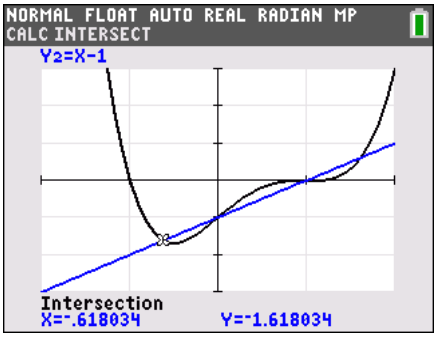
Buigpunten A(-1,-10) en B(1, 0). Rechte AB: y = 5x – 5.
co(P) = $(-2{,}236; 16{,}18) = (1 - 2\phi, -10\phi) = \phi$ co(A) + $(1 - \phi)$ co(B)
co(Q) = (2,236; 6,18) = $(2\phi - 1,\ 10\,\phi - 10) = (1 - \phi)$ co(A) + ϕ co(B)

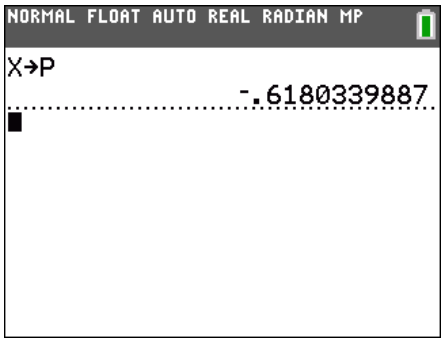
Referentie.
Lin McMullin (http://www.linmcmullin.net/PDF_Files/Qolden_Ratio_in_Quartics_2007.pdf) toonde deze eigenschap aan voor een willekeurige vierdegraadsfunctie waarop twee buigpunten liggen.

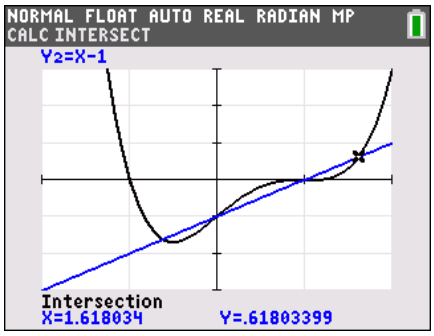
7 DUBBELE OPPERVLAKTE

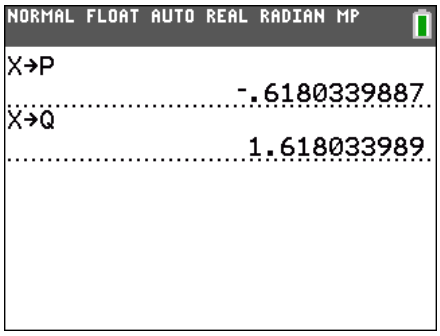
Voor de vierdegraadsfunctie f met als voorschrift $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ geldt dat $f''(x) = 12x(x - 1)$ zodat A(0,-1) en B(1,0) de buigpunten zijn op de grafiek van f.

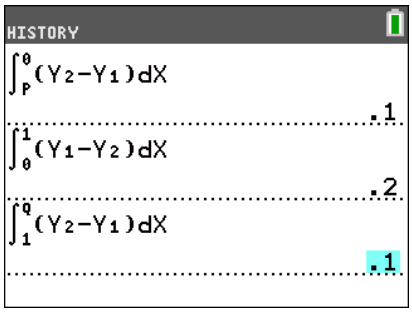
Schermafdrukken voor het stappenplan.











<u>Probleem.</u>
Ga na of de bovenstaande resultaten ook geldig zijn bij de vierdegraadsfunctie g met als functievoorschrift

$$g(x) = x^4 - 6x^2 + 5x.$$

Voor het bepalen van de punten A, B , P en Q: zie opdracht 5 PHI EN BUIGPUNTEN. De drie gebieden tussen de grafiek van g en de rechte AB hebben als oppervlakte resp. 16/5, 32/5 en 16/5.

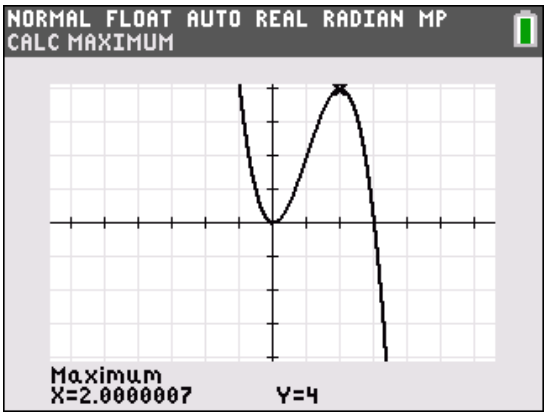
Referentie.
Voor een algemeen bewijs van deze eigenschap: JOHN F. MAHONEY, Quartic Regions © Texas Instrument Inc. (2001).

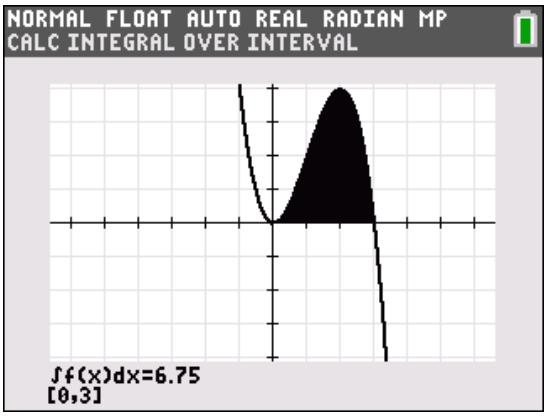
8 CONSTANTE VERHOUDING VAN OPPERVLAKTEN

Hieronder zie je hoe het rekenwerk met de GRM verloopt voor de functies van de derde graad met als voorschrift

$$f(x) = ax^2 - x^3, \quad \text{met } a > 0$$

voor a = 3 en a = 4.

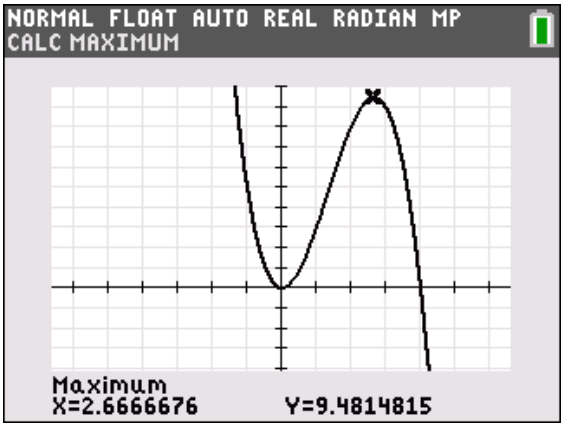


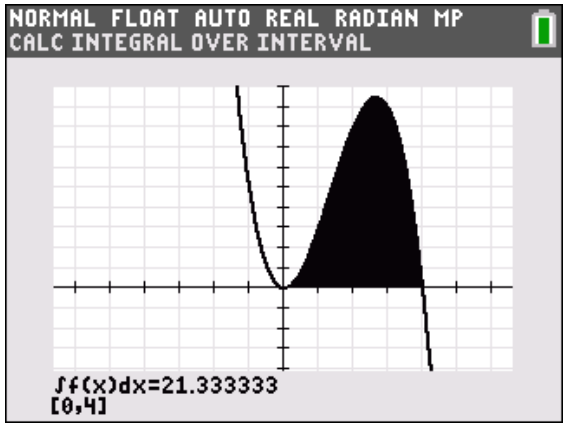


$f(x) = 3x^2 - x^3$
Maximum M(2,4)
$S_1 = 12$

$S_2 = 6{,}75$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$$





$f(x) = 4x^2 - x^3$
Maximum M(8/3, 256/27)
$S_1 = 1024/27$

$S_2 = 64/3$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$$

Vaststelling.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$ is onafhankelijk van de gekozen waarde voor de parameter a.

Voor de familie functies van de vierde graad met als voorschrift

$$f(x) = ax^3 - x^4, \quad \text{met } a > 0$$

is $\frac{S_1}{S_2} = \frac{135}{64}$.

<u>Uitdaging.</u>

Beschouw de familie functies van de n-de graad met als voorschrift

$$f(x) = ax^{n-1} - x^n, \quad \text{met a} > 0 \text{ en n een natuurlijk getal groter dan 1.}$$

Toon aan dat verhouding $\frac{S_1}{S_2}$ onafhankelijk is van de gekozen waarde van de parameter a.

Oplossing.

A(a,0).
f '(x) = (n – 1)ax^{n-2} - n x^{n-1} = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{a(n-1)}{n}$.

$$f\left(\frac{a(n-1)}{n}\right) = \frac{a^n(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

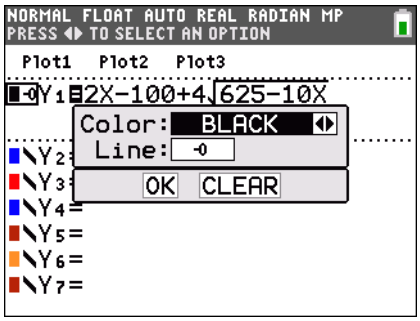
$$S_1 = \frac{a^{n+1}(n-1)^{n-1}}{n^n}$$

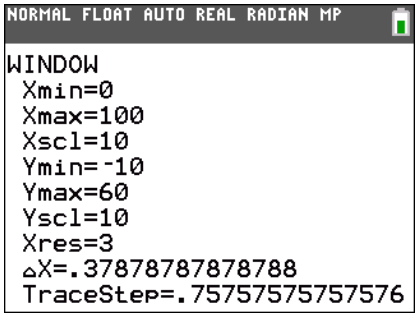
$$S_2 = \int_0^a (ax^{n-1} - x^n)dx = \frac{a^{n+1}}{n(n+1)}$$

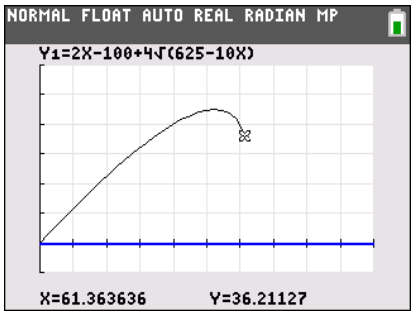
$$\frac{S_1}{S_2} = (n+1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

9 DE ONTPLOFTE VUURPIJL

Om na te gaan of de baan helemaal wordt getekend op het scherm volstaat het de functiewaarde voor x = 62,5 te berekenen.







<u>Oplossingen.</u>

1. $y' = 2 - \frac{20}{\sqrt{625-10x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{625-10x} = 10$
   $\Leftrightarrow 625 - 10x = 100$
   $\Leftrightarrow x = 52{,}5.$
   Dan is y = 45. De pijl bereikt een hoogte van 45 m.

2. Eis: 625 – 10x ≥ 0. De maximale toegelaten x-waarde is x = 62,5
   De pijl bevindt zich dan op een hoogte van 25 m.

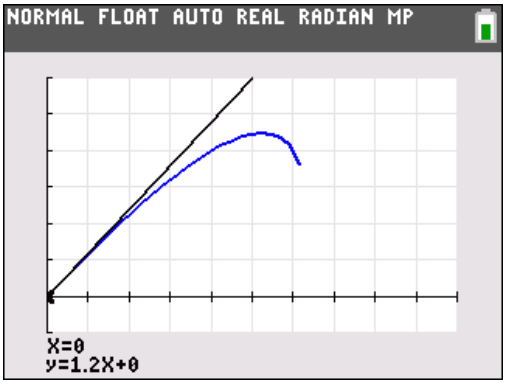
3. $2x - 100 + 4\sqrt{625-10x} = 40 \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{625-10x} = 70 - x.$

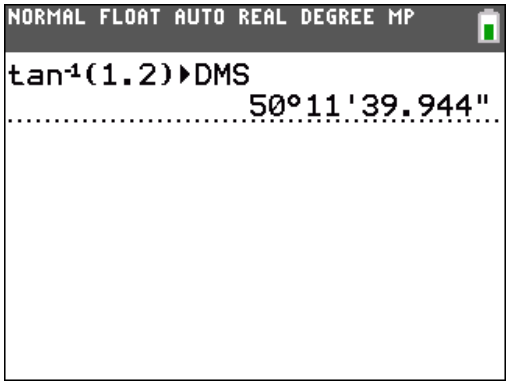
   Door beide leden te kwadrateren bekomt men de vierkantsvergelijking

   $$x^2 - 100x + 2400 = 0$$

   met als oplossingen x = 40 en x = 60.

4. De eerste afgeleide in het punt x = 0 is 1,2. De vuurpijl wordt afgeschoten onder een hoek van ongeveer 50° met de horizontale richting.



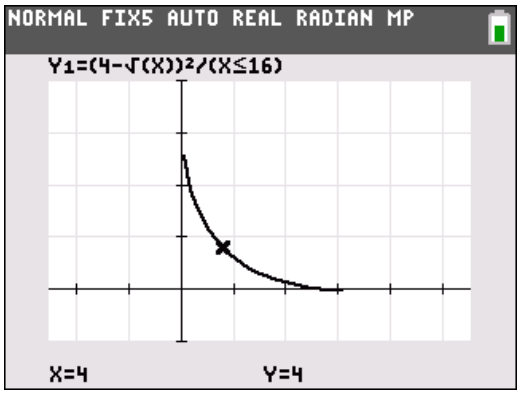


10 RAAKLIJN EN ASSEGMENTEN

Beschouw de verzameling punten gedefinieerd door het voorschrift

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \qquad (*)$$

Het voorschrift $y = \left(4 - \sqrt{x}\right)^2$ levert niet dezelfde puntenverzameling als (*) omdat $\sqrt{y} = 4 - \sqrt{x}$ voor x de beperking $0 \leq x \leq 16$ oplevert.



Op de schermafdruk hiernaast zie je hoe je de gewenste beperking kunt inbouwen in het functievoorschrift voor de TI-84.

Raaklijn in (1, 9): y = -3x +12.
Raaklijn in (4,4): y = -x + 8.
Raaklijn in (9,1): y = -x/3 + 4.

<u>Oplossingen.</u>

1. |OP| + |OQ| is constant (onafhankelijk van het gekozen raakpunt) en gelijk aan 16.

2. De raaklijn in R(a,b) heeft als vergelijking

$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\,(x - a).$$

Dan is

$$|OP| + |OQ| = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

en dit is te herleiden tot

$$|OP| + |OQ| = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2. \quad (**)$$

Aangezien R(a,b) voldoet aan (*) is $|OP| + |OQ| = 16$.

3. Voor $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$ blijkt uit (**) dat voor een willekeurig raakpunt R(a,b) geldt dat $|OP| + |OQ| = 36$.

Opmerking. De richtingscoëfficiënt van een raaklijn kan je bepalen door (*) impliciet af te leiden:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \quad \Rightarrow y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

11 SCHUIFPROBLEEM

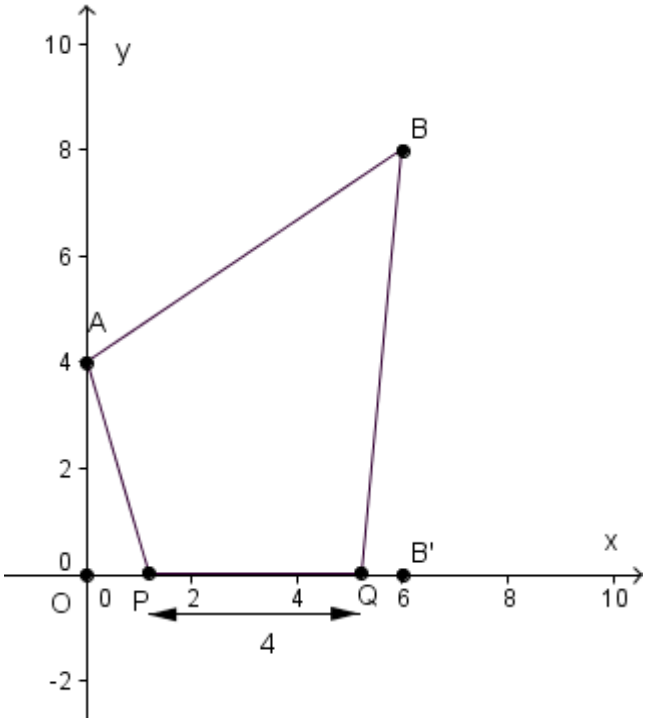
<u>Probleem.</u>

De punten A(0,4) en B(6,8) zijn vast.
De punten P en Q liggen op de x-as
en het lijnstuk [PQ] heeft een vaste lengte 4.

Waar moet men het punt P kiezen
opdat de omtrek van de vierhoek ABQP
zo klein mogelijk zou zijn?

Bepaal voor die positie van P de hoeken
$A\widehat{P}O$ en $B\widehat{Q}B'$ (met B' = (6,0)).

Wat stel je vast?



<u>Stappenplan voor de oplossing van het extremumvraagstuk.</u>

1. Om aan te tonen dat de omtrek van de vierhoek ABQP met A(0,4), B(6,8), P(x, 0) en Q(x+4,0) bepaald is door

$$p(x) = \sqrt{16+x^2} + \sqrt{(2-x)^2+64} + 4 + \sqrt{52}.$$

   volstaat het de stelling van Pythagoras toe in de driehoeken OAP en QBB'.

2. Minimum voor x = 0,66666… = 2/3.

$$\frac{x}{\sqrt{16+x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+64}}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2(x^2-4x+68) = (4-4x+x^2)(16+x^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

   De positieve oplossing van deze vergelijking is x = $\frac{2}{3}$.
   Ga na dat voor x = $\frac{2}{3}$ geldt dat $\tan A\widehat{P}O = \tan B\widehat{Q}B'$.

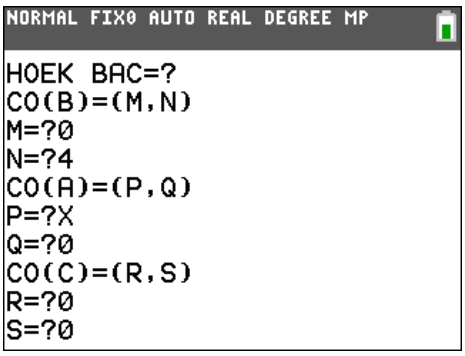
   Waarom voldoet de negatieve oplossing x = -2 niet?

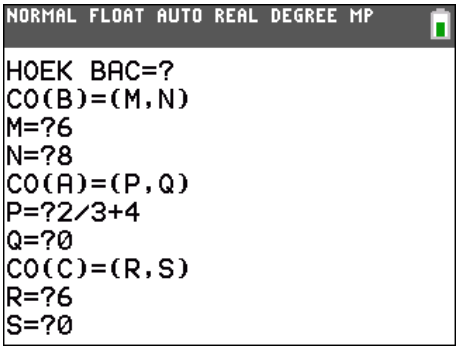
3. Om de hoeken te bepalen kan je gebruik maken van het onderstaande programma

PROGRAMMA VOOR DE GRM

Om de hoek $B\hat{A}C$ te bepalen als de coördinaten gekend zijn van het hoekpunt A en van de punten B en C op de twee benen van de hoek, kan men het onderstaande programma gebruiken. Hierin wordt gebruik gemaakt van de (gekende) formule voor de cosinus van de hoek tussen twee vectoren. De hoek wordt uitgedrukt in zestigdelige graden (Degree).

```
PROGRAM:COS
:ClrHome
:Degree
:Disp "HOEK BAC=?"
:Disp "CO(B)=(M,N)"
:Prompt M,N
:Disp "CO(A)=(P,Q)"
:Prompt P,Q
:Disp "CO(C)=(R,S)"
:Prompt R,S
:M–P→T
:R–P→U
: N–Q→V
: S–Q→W
:cos^-1((TU+VW)/√(T²+V²)√(U²+W²))→H
:ClrHome
:Disp "HOEK BAC(°)= ",H
```





De beide hoeken zijn gelijk en ongeveer 80°32'.

4. Merk op:

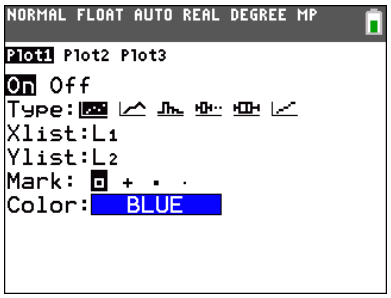
$$p'(x) = 0 \iff \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+64}} \ .$$

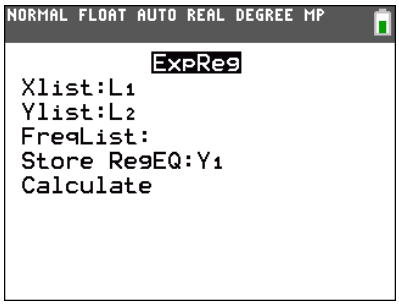
Het linkerlid van die vergelijking is $\cos \widehat{APO}$ en het rechterlid is $\cos \widehat{BQB'}$.

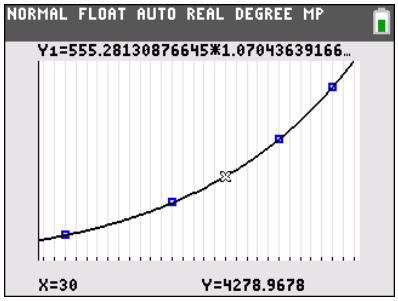
12 GEWICHTSTOENAME BIJ EEN ZWANGERE VROUW

Oplossingen probleem 1.

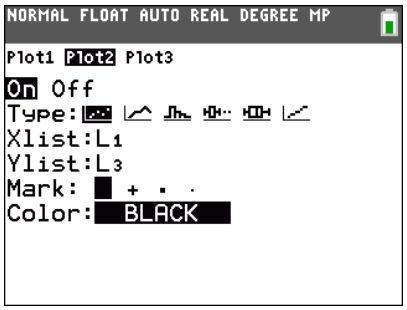
1. Gewichtstoename van de zwangere vrouw $G(t) = 555{,}28\ (1{,}07)^t$.

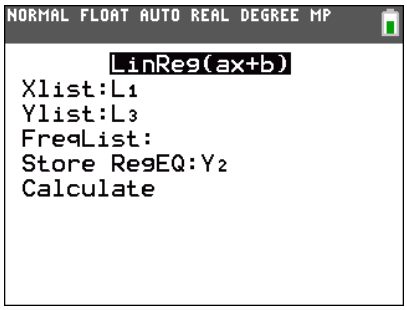


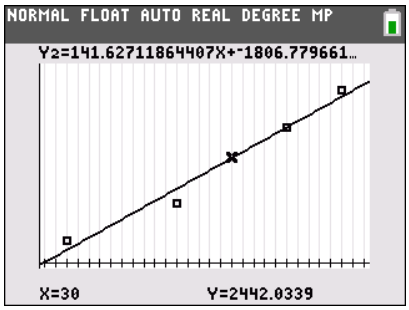




2. Gewicht van de ongeboren baby $F(t) = 141{,}6t - 1806{,}8$.



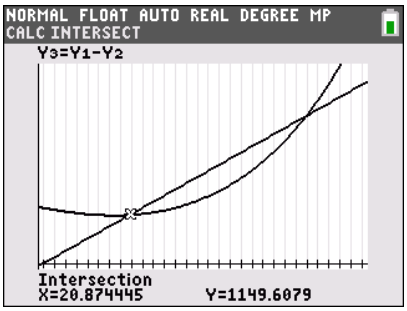


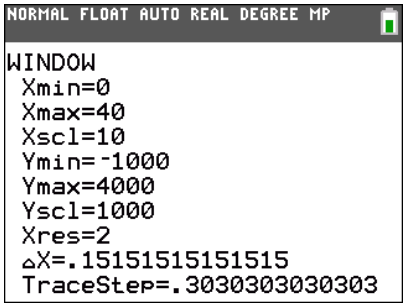


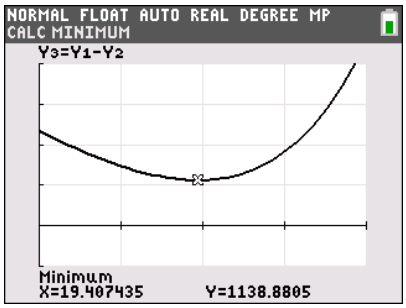
Oplossingen probleem 2.

1. Na 21 weken en na 37 weken.

2. In de 20ste week van de zwangerschap.

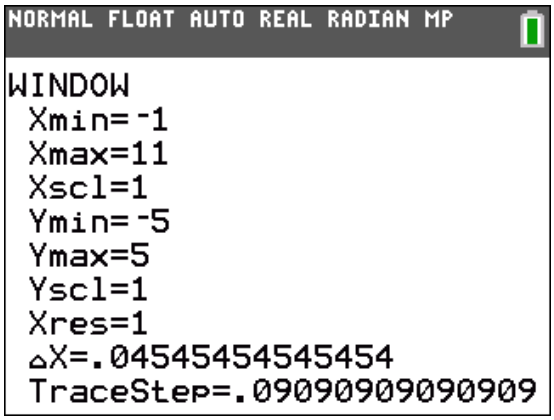


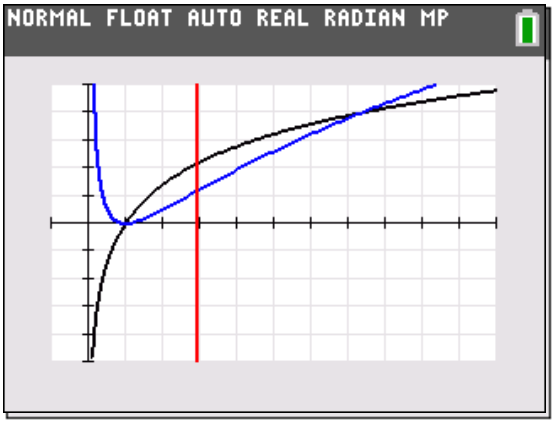


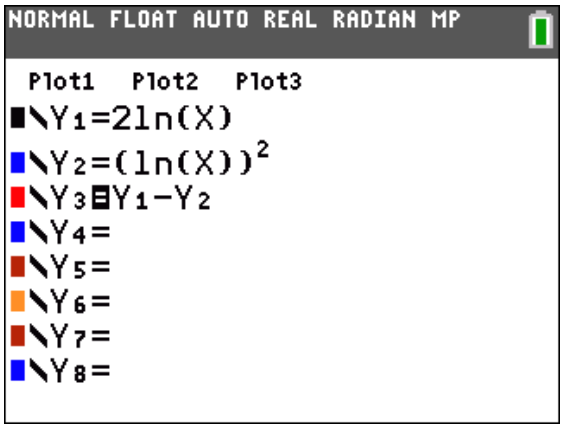


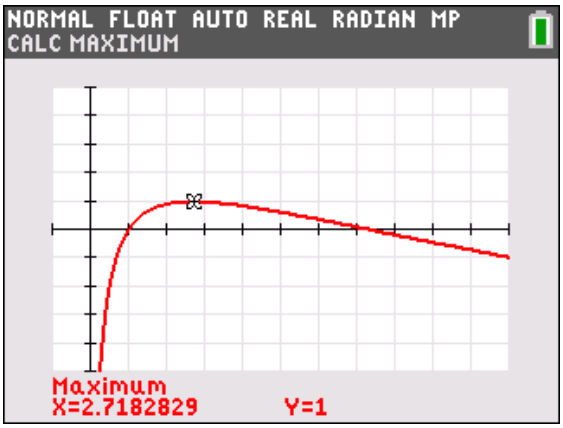
13 HET GETAL VAN EULER

Oplossing van probleem 1.









$2\ln x = (\ln x)^2 \Leftrightarrow \ln x = 0$ of $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = e^0 = 1$ of $x = e^2$.

$$v'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$$

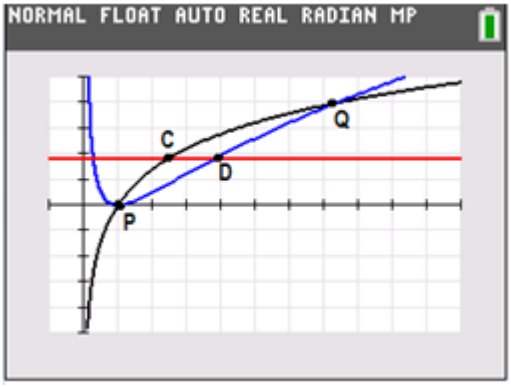
$\Leftrightarrow x = e$.

Oplossing van probleem 2.

Bepaal van de functies f en g telkens de inverse functie:

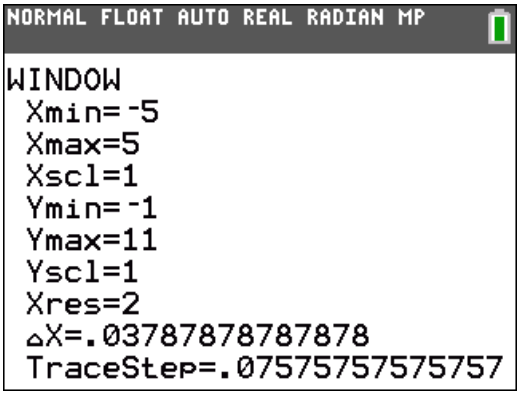
$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad \text{en} \quad g^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

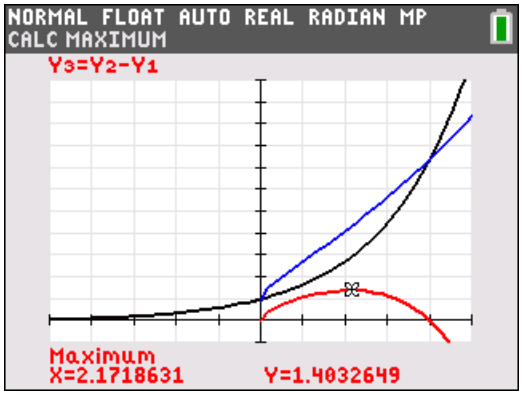
Merk op dat we hier voor g^{-1} een beperking hebben genomen omdat de functie g niet injectief is, waardoor de inverse relatie zelf geen functie meer is.



Schets de beide grafieken in een passend venster en bepaal het maximum op de grafiek van de verschilfunctie v met als voorschrift

$$v(x) = e^{\sqrt{x}} - e^{\frac{x}{2}}.$$



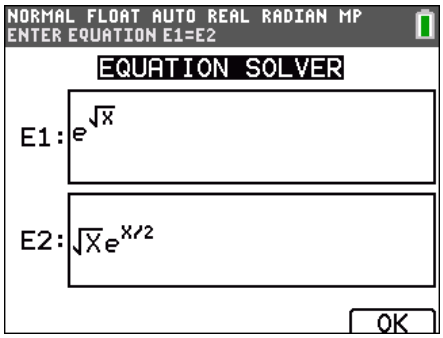


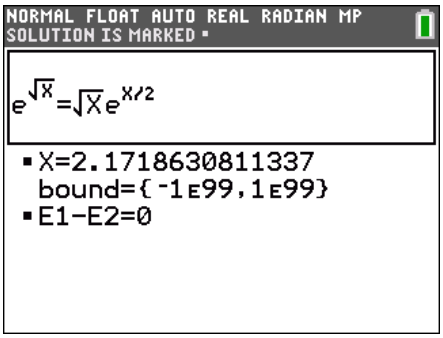
Om dit maximum via algebraïsch rekenwerk te bepalen moet de vergelijking v'(x) = 0 opgelost worden.

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\, e^{\frac{x}{2}}.$$

Hier is men aangewezen op een benaderingsmethode of op de Solver-instructie op de GRM.





14 DE IDEALE GASAANSLUITING

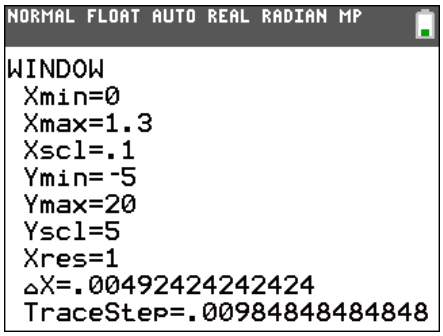
Eerste oplossing.

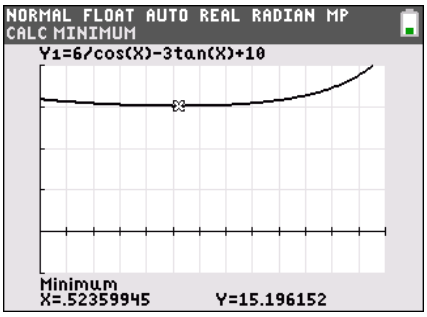
$$L(\alpha) = \frac{6}{\cos\alpha} - 3\tan\alpha + 10 \text{ met } 0 \le \tan\alpha \le \frac{10}{3}.$$

Hoe lang zou het traject zijn wanneer men de verbinding vanuit het punt C rechtstreeks naar de punten A en B zou maken? ($2\sqrt{109}$ m of ongeveer 20,88 m)

En hoe lang zou het traject zijn wanneer men vanuit C eerst een verbinding maakt met het midden M tussen A en B? (16 m)

Schets de grafiek van de functie L in een passend venster (MODE RADIAN) en bepaal hierop het minimum.





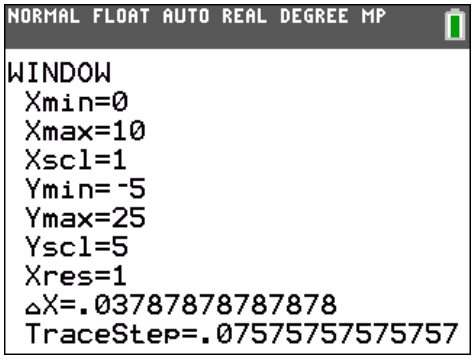
Druk de hoek waarvoor het minimum wordt bereikt ook uit in zestigdelige graden. ($\alpha = 30°$)
Hoe lang is dan het stuk van C tot D? (8, 27 m)
En hoe lang is het totale verbindingstraject dan? (15,20 m)

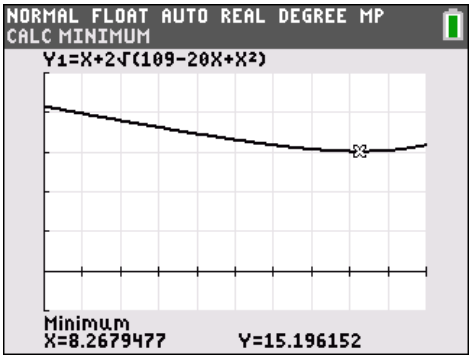
Bepaal de waarde van de hoek α door de nulwaarde van de afgeleide van de functie L te berekenen:

$$L'(\alpha) = \frac{6\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{3}{\cos^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Tweede oplossing.

$$L(x) = x + 2\sqrt{109 - 20x + x^2} \text{ met } 0 \le x \le 10.$$





15 DE BEWAKINGSCAMERA BOVEN DE STADSPOORT

<u>Oplossingen van probleem 1.</u>

1. De symmetrieas van beide deuren heeft als vergelijking x = 3. Het spiegelbeeld van een punt R(x,y) opzichte van deze rechte is het punt R'(6 – x, y). De bovenrand van de linkse deur is dan bepaald door het functievoorschrift

$$g(x) = f(6-x)$$

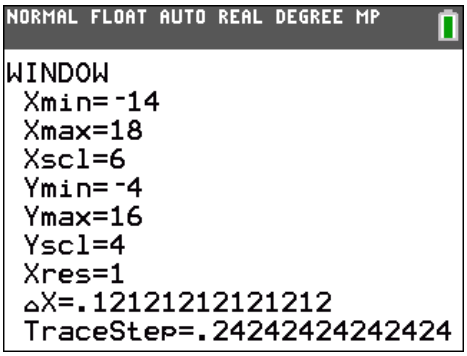
$$= \sqrt{72 - 2(6-x)^2} + 4$$

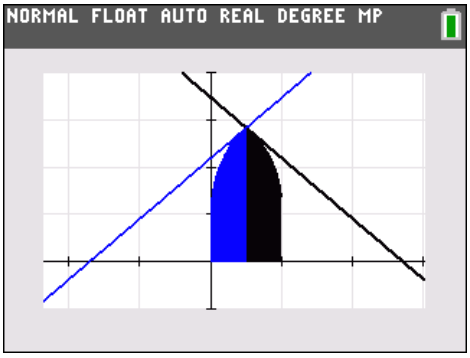
$$= \sqrt{24x - 2x^2} + 4 \ , \ \text{met } 0 \leq x \leq 3.$$

2. De beperking voor het domein kan je op de TI-84 bijvoorbeeld op de volgende manier inbouwen:

$$Y_1 = (\sqrt{72 - 2X^2} + 4)/(X \geq 3)$$

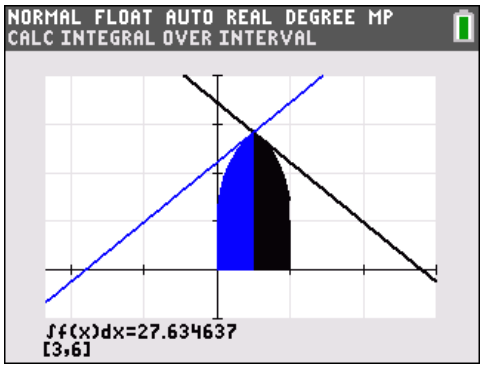
$$Y_2 = (\sqrt{24X - 2X^2} + 4)/(X \leq 3).$$

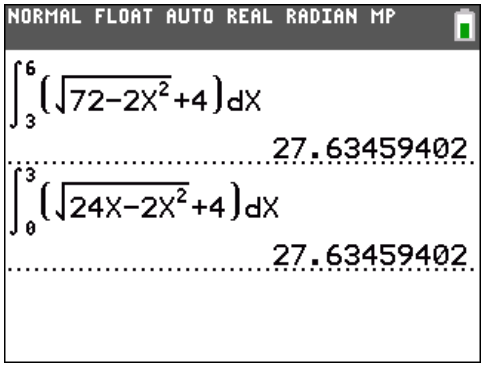




|AB| = 27,7 m.

3. De oppervlakte van beide deuren is 27,63 m².





Via algebraïsch rekenwerk vinden we:

$$\int_3^6 \left(\sqrt{72-2x^2}+4\right)dx = \sqrt{2}\int_3^6 \sqrt{36-x^2}dx + [4x]_3^6 \ .$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x\sqrt{36-x^2}}{2} + 18\ \mathrm{Bgsin}\frac{x}{6}\right]_3^6 + 12$$

$$= \sqrt{2}\left(18\ \mathrm{Bgsin}1 - \frac{3\sqrt{27}}{2} - 18\mathrm{Bgsin}\frac{1}{2}\right) + 12$$

$$= \sqrt{2}\left(6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) + 12 \ .$$

<u>Oplossing van probleem 2.</u>

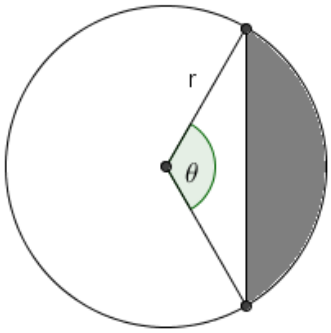
$f(x) = \sqrt{25-x^2}$, met $2{,}5 \le x \le 5$.

Dit is het voorschrift van een kwartcirkel. De cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ heeft als middelpunt M(0,0) en straal 5. Dan is de bovenrand van de linkse deur bepaald door de cirkel met middelpunt O(5,0) en straal 5: $(x-5)^2 + y^2 = 25$.

Dan is

$g(x) = \sqrt{10x - x^2}$, met $0 \le x \le 2{,}5$.

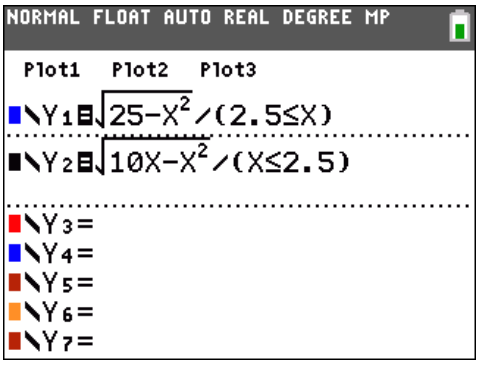
De beide deuren samen vormen een cirkelsegment van een cirkel met straal r = 5 en waarbij de middelpuntshoek θ = 120°.

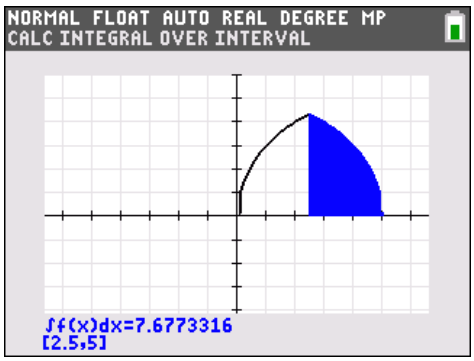


Formule voor de oppervlakte van een cirkelsegment:

$$A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta).$$

De oppervlakte van beide deuren samen is 15,35 m².



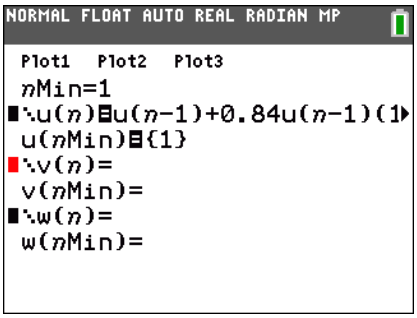


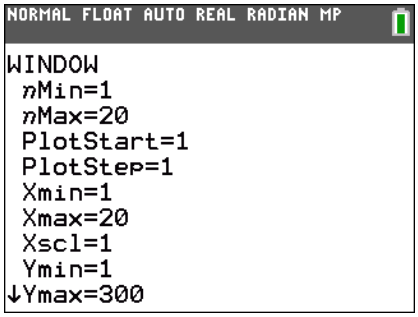
16 GROEI VAN ZONNEBLOEMEN

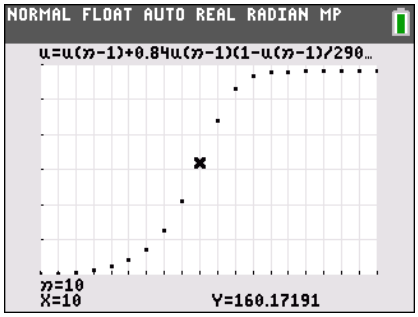
MODEL 1.

$$L(n) = L(n-1) + 0{,}84L(n-1)\left(1 - \frac{L(n-1)}{290}\right), \quad \text{met } L(1) = 1.$$

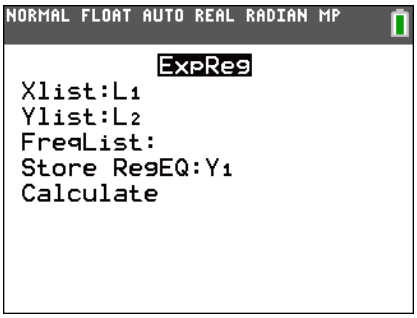
Hoe lang worden de zonnebloemen uiteindelijk? Antwoord: 2,90 m. Vervang hiervoor in de bovenstaande betrekking L(n – 1) en L(n) door de limietwaarde L.

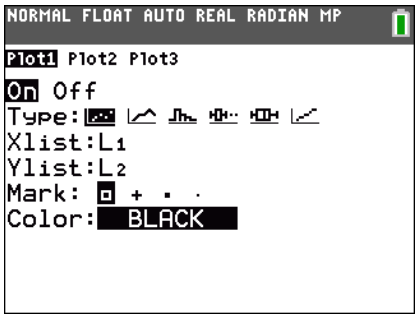


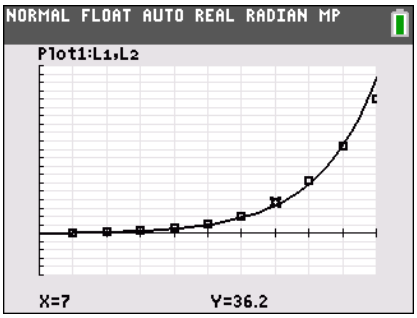




De exponentiële functie heeft als voorschrift L(t) = 0,61 · 1,77^t = 0,61 · e^{0,57t}. Merk op dat dit een 'modelfunctie' is en dat bijvoorbeeld L(0) = 0,61 in feite geen realistische waarde is.



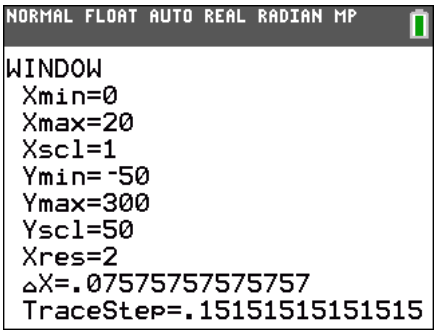


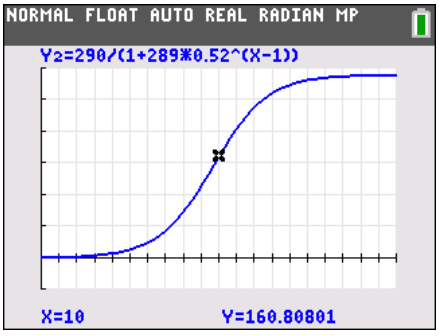


MODEL 2.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{290}{1 + 289 \cdot 0{,}55^{t-1}} = 290.$$

De zonnebloemen bereiken een lengte van 2,90 m.



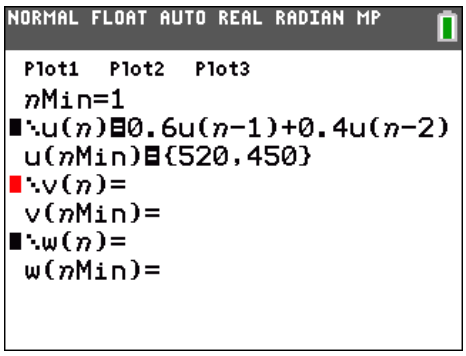


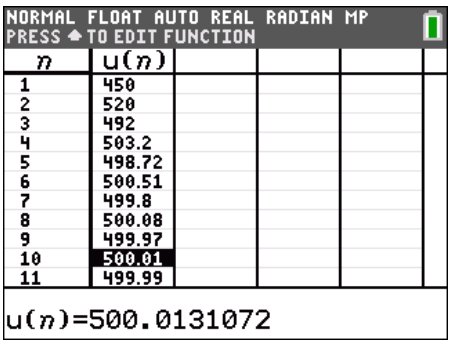
De exponentiële functie heeft als voorschrift L(t) = 0,65 · 1,78^t = 0,65 · $e^{0,58t}$.

17 DE VERKOOP VAN CHOCOPASTA

Probleem 1.

Zet de GRM in MODE SEQ (rijen) en tik bij u(n) het passende voorschrift in.
Tik bij u(nMin) de beginwaarden in.
Stel een tabel op met de rij-waarden.





Blijkbaar stabiliseert de verkoop en zal Allfoods dan best maandelijks 500 potten Nutina aankopen.

Verklaring.
We kunnen deze 'limietwaarde' ook bepalen aan de hand van de techniek van differentievergelijkingen. Dit gaat als volgt.

Los de volgende differentievergelijking op (d.w.z. bepaal y_n als een functie van n):

$$y_{n+2} = 0{,}6y_{n+1} + 0{,}4y_n \quad (**)$$

met de beginvoorwaarden $y_1 = 450$ en $y_2 = 520$.

We stellen een oplossing voor van het type $y_n = a^n$. Als we die invullen in (**) bekomen we na vereenvoudiging de kwadratische vergelijking

$$a^2 - 0{,}6a - 0{,}4 = 0$$

met als oplossingen a = 1 en a = -0,4.

Dan zijn $y_n = 1^n = 1$ en $y_n = (-0{,}4)^n$ oplossingen van (**) en de algemene oplossing van deze differentievergelijking is dan een lineaire combinatie van de gevonden oplossingen:

$$y_n = c_1 + c_2(-0{,}4)^n.$$

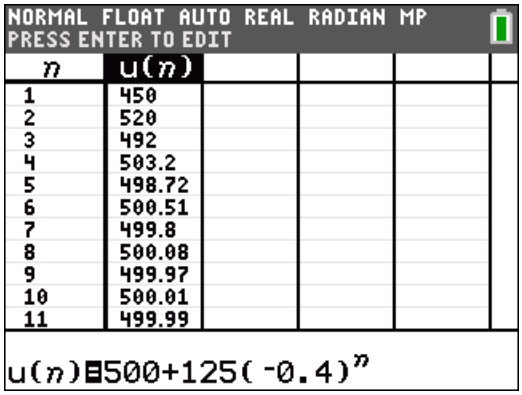
De constanten bepaalt men met behulp van de beginvoorwaarden: $y_1 = 450$ en $y_2 = 520$. Dit resulteert in een stelsel van twee vergelijkingen met als oplossing $c_1 = 500$ en $c_2 = 125$.

Het aantal potten Nutina dat Allfoods in de n-de maand bij de groothandel aankoopt is dan gelijk aan

$$P_n = 500 + 125\,(-0{,}4)^n\,.$$

Hieruit blijkt dat

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 500.$$



Een tabel met waarden van de expliciet gedefinieerde rij

<u>Probleem 2.</u>

$a^2 - 0{,}5a - 0{,}5 = 0$ heeft als oplossingen $a = 1$ en $a = -0{,}5$.

$y_n = c_1 + c_2(-0{,}5)^n$.

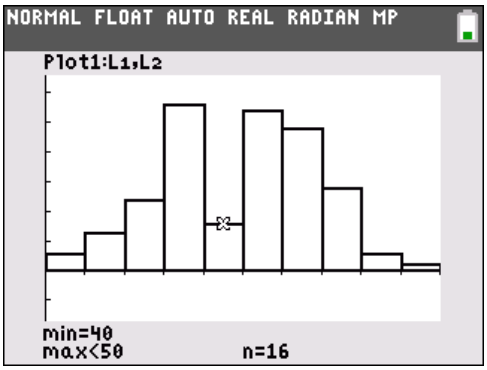
$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{2}\,c_2 = 110 \\ c_1 + \frac{1}{4}\,c_2 = 140 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = 130 \quad \text{en} \quad c_2 = 40.$$

$P_n = 130 + 40\,(-0{,}5)^n$.

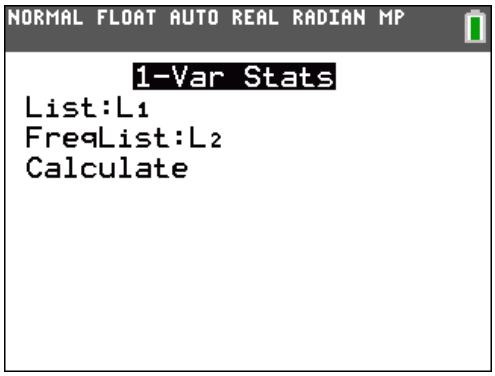
$$\lim_{n\to\infty} P_n = 130.$$

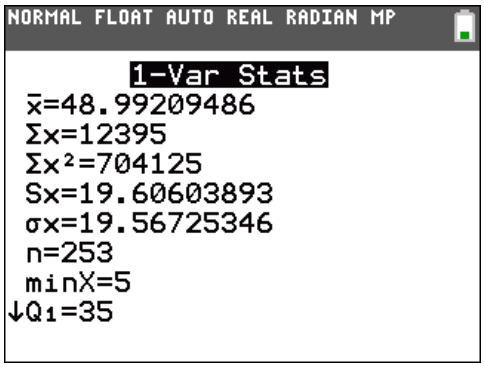
18 DE GEMANIPULEERDE EXAMENRESULTATEN

1. Via TRACE kan je de waarden op het histogram overlopen.

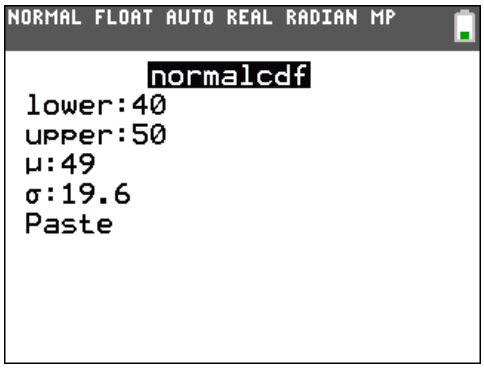


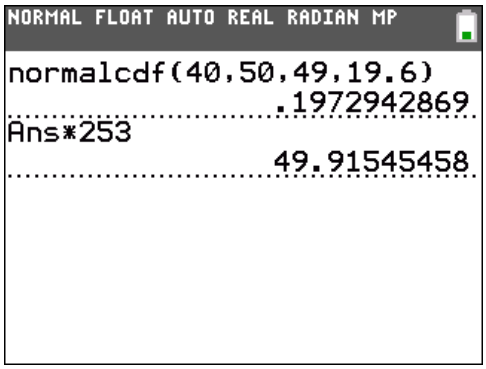
2. Gemiddelde = 54; standaardafwijking = 19,6.





3. Bij een normale verdeling met gemiddelde 49 en standaardafwijking 19,6 zouden 50 studenten een score tussen 40 % en 50 % moeten gekregen hebben.

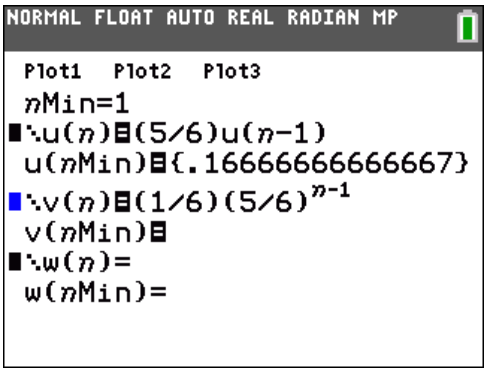


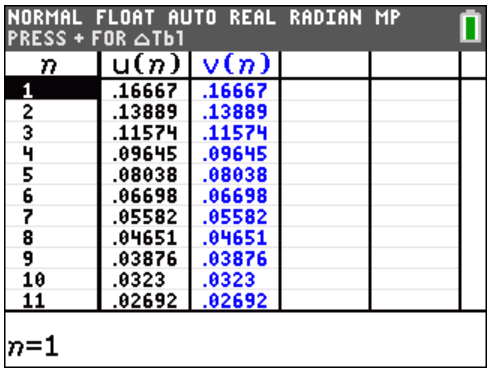


19 SEVEN UP

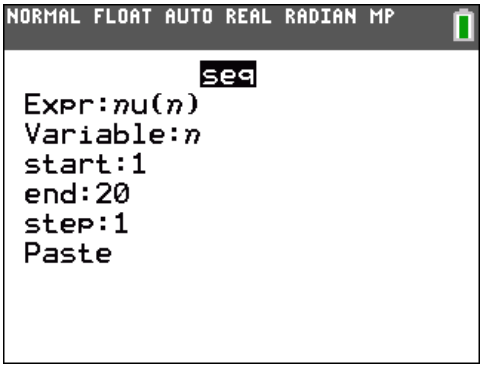
1. $P_5 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$ (geometrische verdeling).

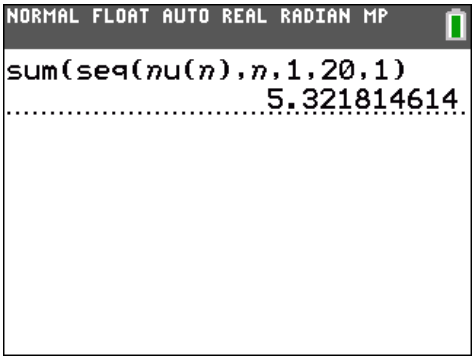
2. $P_n = \frac{5}{6} \cdot P_{n-1}$ met $P_1 = \frac{1}{6}$; $P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.





3.





S_{30} = 5,848342072.

S_{40} = 5,96870262.

De rij getallen S_n convergeert naar 6. Dit betekent dat gemiddeld om de zes worpen de som van het aantal ogen van beide dobbelstenen zeven zal zijn.

Hieronder geven we hiervoor een correcte wiskundige verklaring.

FORMULE
Het gemiddeld aantal worpen dat nodig is om voor de eerste keer ‘SEVEN UP’ te gooien is

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = 6\,.$$

Om dit aan te tonen maken we gebruik van een gekende formule voor meetkundige reeksen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad met\ |r| < 1\,.$$

Dan is (beide leden afleiden naar r)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nar^{n-1} = \frac{a}{(1-r)^2}$$

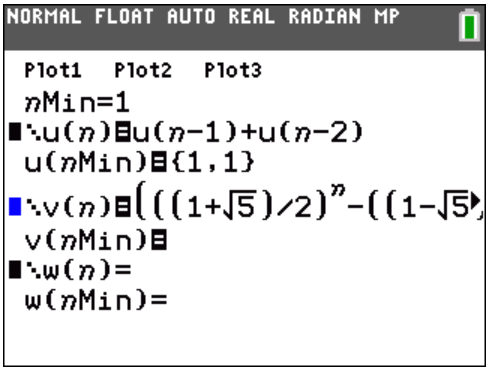
.

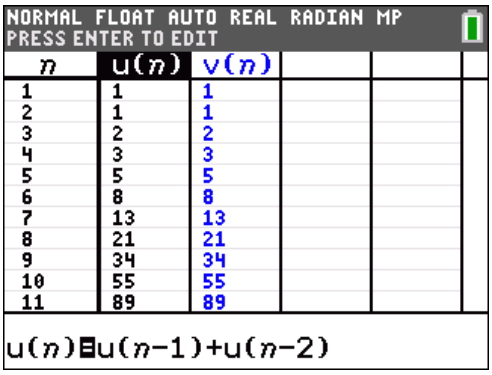
Stel hierin a = 1/6 en r = 5/6 , dan is

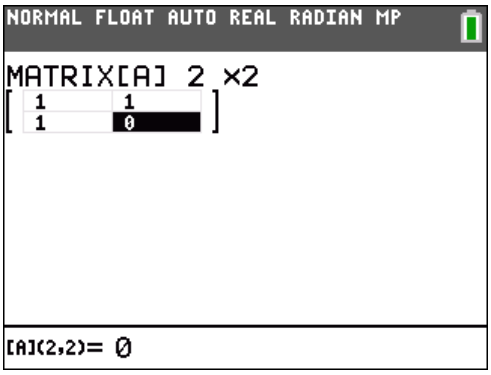
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{6}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6.$$

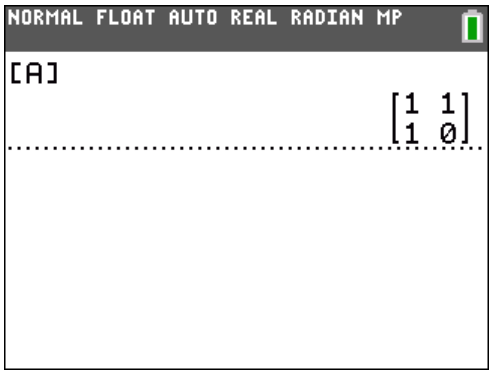
20 FIBONACCI EN PELL

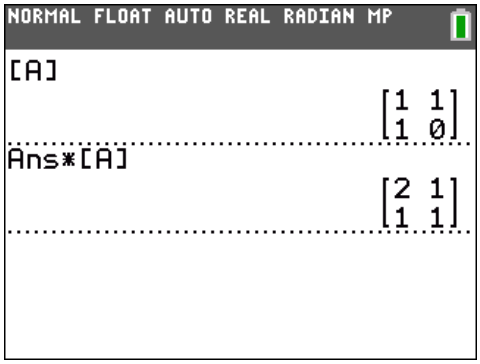
RIJ VAN FIBONACCI

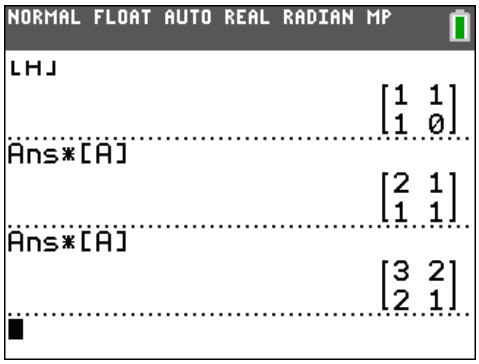












Vaststelling.

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix},$$ waarbij F_n het n-de Fibonaccigetal is.

Bewijs door volledige inductie.

- Basisstap. De formule klopt voor n = 2.
- Inductiestap.
  Stel dat

$$A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix},$$

Dan is

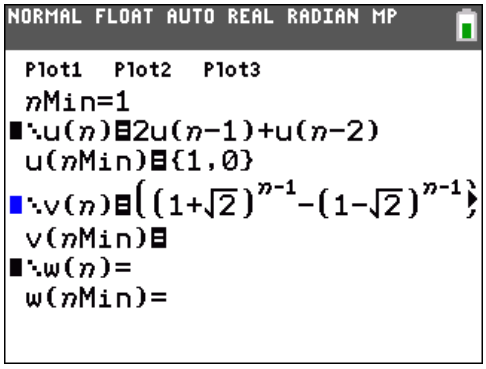
$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}.$$

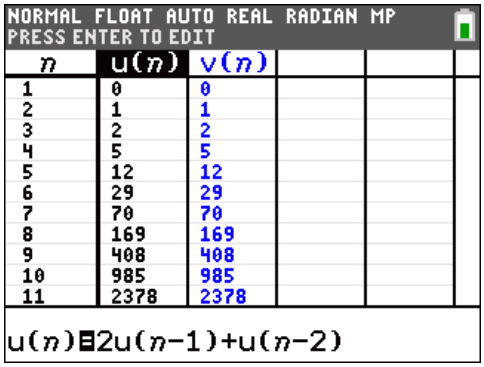
<u>RIJ VAN PELL</u>

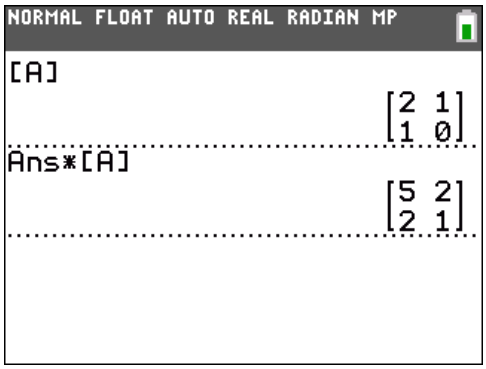
0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169 …

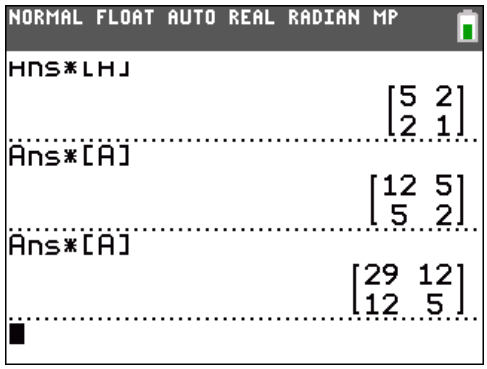
Voor het n-de Pellgetal bestaat er ook een expliciet voorschrift:

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}} .$$









$A^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$, waarbij P_n het n-de Pellgetal is.

Dit kan eveneens via volledige inductie bewezen worden.

Meer informatie op Wikipedia (Pellgetal) en www.gnomon.bloggen.be (zoekopdracht: Pell).

OVER DE AUTEUR DR. LUC GHEYSENS

LUC GHEYSENS (°1953) was gedurende meer dan 35 jaar werkzaam in het Vlaamse wiskundeonderwijs. Na zijn humaniorastudies in de Grieks-Latijnse afdeling van het Sint-Jozefinstituut te Kortrijk, volgde hij een voorbereidend jaar wiskunde in Gent. Na zijn studies voor licentiaat wiskunde aan de KU Leuven, behaalde hij er in 1981 het diploma van Doctor in de Wetenschappen (groep wiskunde). Hij zette daarna nog een jaar zijn onderzoekswerk verder aan de University of Durham (Engeland) in de afdeling differentiaalmeetkunde. Daarna was hij actief als leraar wiskunde in het Heilig-Hartcollege in Waregem (1982-1983) en als leraar wiskunde en informatica in het Sint-Jozefinstituut en De Pleinschool in Kortrijk (1984-2011). Vanaf 1995 werkte hij mee aan het lanceren van het grafisch rekentoestel in dienst van Texas Instruments en bleef gedurende heel wat jaren actief als nascholer en als medewerker van T^3-Vlaanderen. In 2002 volgde hij Walter De Volder op als vakbegeleider wiskunde in het bisdom Brugge en werd daarna pedagogisch adviseur bij het VSKO. Momenteel is hij jurylid van de Vlaamse Wiskunde Olympiade.

Zijn belangstelling ging vooral uit naar de didactiek van de wiskunde, probleemoplossend denken, functioneel ICT-gebruik en de overgang secundair-hoger onderwijs. Dat wiskunde hem blijft boeien kan je wellicht afleiden uit een bezoekje aan zijn wiskundeblog www.gnomon.bloggen.be .

T^3-VLAANDEREN BEDANKT LUC

In 1998 verscheen de eerste publicatie van T^3-Vlaanderen: “Informatietechnologie in de wiskundeles, TI-92: kennismaken en toepassen” , met Luc als medeauteur. Na cahier nr. 12 is dit cahier nr. 40 zijn laatste cahier. We danken Luc voor de talrijke nascholingen en bijdragen tot de T^3 symposia, als gewaardeerd spreker voor een plenaire lezing of een workshop. Luc heeft laten zien hoe wiskunde en technologie goed kunnen samenwerken, ook dit cahier staat weer garant voor een prima bijdrage aan het wiskundeonderwijs in Vlaanderen.
Beste Luc, het ga je goed en hartelijk dank voor de aangename samenwerking!

Dit cahier is geschreven vanuit het standpunt van ‘de onderzoeker’. Aan de hand van twintig uitgewerkte voorbeelden voor de derde graad secundair onderwijs wordt aangetoond dat een grafische rekenmachine niet enkel kan helpen om een concreet probleem aan te pakken, maar ook inspiratie kan bieden om nieuwe problemen en eigenschappen te ontdekken. Het eerste deel van het cahier bevat 20 uitdagende werkbladen en in het tweede deel worden de opdrachten uitgewerkt. Hierbij is gebruik gemaakt van een TI-84 Plus C Silver Edition, maar een grafische rekenmachine met een kleurenscherm is geen ‘must’ om de opgaven aan te pakken.

Over de auteur LUC GHEYSENS leest u meer op de laatste pagina van dit cahier.

April 2014

© 2014 Dit cahier is bedoeld als lesmateriaal, mag hiervoor vrij gekopieerd worden en kan gedownload worden via de website **www.t3vlaanderen.be**