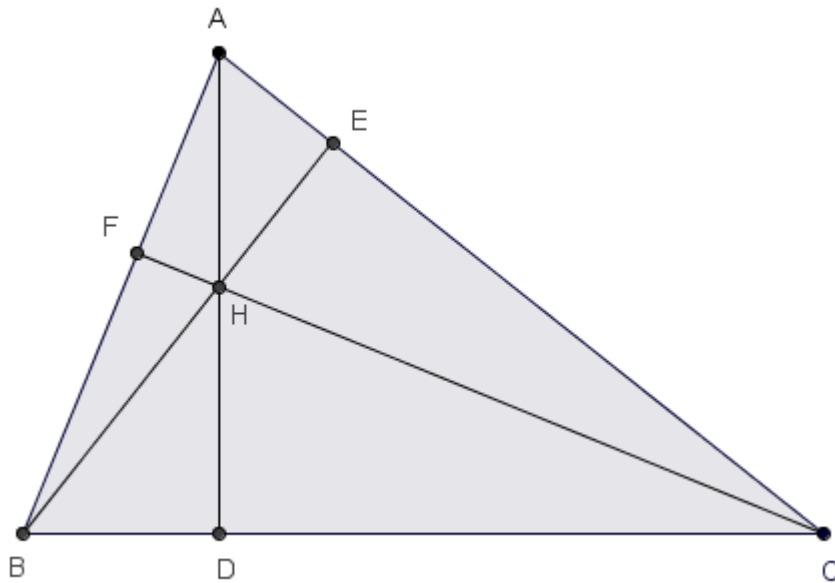


PROBLEEM 6

AD, BE en CF zijn de hoogtelijnen in een willekeurige driehoek ABC en H is het hoogtepunt van de driehoek.

Bewijs dat

$$\frac{|HD|}{|AD|} + \frac{|HE|}{|BE|} + \frac{|HF|}{|CF|} = 1.$$



BEWIJS

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2} |BD| |HD|}{\frac{1}{2} |AD| |BD|} = \frac{\text{opp. } \triangle BHD}{\text{opp. } \triangle BAD}$$

en om een analoge reden is

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{\text{opp. } \triangle CHD}{\text{opp. } \triangle CAD}.$$

In het algemeen (gekende eigenschap) volgt uit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ dat $\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f}$

en dus is

$$\frac{|HD|}{|AD|} = \frac{\text{opp. } \triangle BHD + \text{opp. } \triangle CHD}{\text{opp. } \triangle BAD + \text{opp. } \triangle CAD} = \frac{\text{opp. } \triangle BHC}{\text{opp. } \triangle ABC} \quad (1)$$

Analoog is

$$\frac{|HE|}{|BE|} = \frac{\text{opp. } \triangle AHC}{\text{opp. } \triangle ABC} \quad (2) \quad \text{en} \quad \frac{|HF|}{|CF|} = \frac{\text{opp. } \triangle AHB}{\text{opp. } \triangle ABC} \quad (3)$$

(1) + (2) + (3) geeft dan het gewenste resultaat.