

Samen met Euclides behoort Archimedes tot de belangrijkste wiskundigen van de Klassieke Oudheid. Hij vond een nauwkeurige benadering van π , verklaarde het drijfvermogen in vloeistoffen en gebruikte een verre voorloper van Newtons integraalrekening om de oppervlakte of inhoud van ronde vormen te berekenen. Maar bij Archimedes komen zelfs de *Mythbusters* er aan te pas om feiten van mythen te scheiden.

door Arnout Jaspers

ARCHIMEDES (CA. 287-212 BC):

DE ONMETELIJKE

Zijn dood is een schoolvoorbeeld van wat legerwoordvoerders tegenwoordig *collateral damage* noemen. Archimedes (ca. 287-212 voor Christus) woonde in Syracuse, destijds de hoofdstad van Sicilië, dat door de Romeinen werd belegerd omdat de stad in de Tweede Punische oorlog de kant van de Carthagers gekozen had. Het beleg slaagde, Romeinse soldaten plunderden de stad en troffen Archimedes aan, die als altijd zijn in het zand getekende diagrammen bestudeerde. 'Kom niet aan mijn cirkels!' riep hij uit, maar dat moet je tegen een soldaat die net je voordeur heeft ingetrapt niet zeggen, dat was toen ook al zo. In strijd met de vooraf gegeven orders van de Romeinse bevelhebber Marcus Marcellus maakte de soldaat de beroemde Archimedes een kopje kleiner.

Het is echter heel onwaarschijnlijk dat het letterlijk zo gegaan is. In de tijd van Archimedes waren de meeste mensen analfabeet en werden verhalen mondeling doorverteld totdat iemand die wel kon schrijven ze noteerde, vaak pas tientallen jaren later. Eeuwenlang schreven kopiisten zo'n verhaal dan weer van elkaar over, met weglatingen, fouten en verfraaiingen.

Ook de anekdote over Archimedes die 'Eureka! Eureka!' roepend naakt door de straten van Syracuse rende, is vast een co-productie van generaties creatieve overschrijvers. Eureka is Grieks voor 'Ik heb het gevonden'. Volgens deze mythe stapte Archimedes in bad toen hij bedacht hoe hij het goudgehalte van de kroon van koning Hiëro de Tweede kon controleren. Hiëro vermoedde namelijk dat het lichtere en goedkopere zilver in het materiaal voor de kroon was bijgemengd. Het bad was tot aan de rand gevuld, dus toen Archimedes er in stapte, liep er precies zoveel water over de rand als het volume van zijn ondergedompelde lichaam.

Dat was ook de oplossing voor de kroon: maak met behulp van een balans eerst een klomp zuiver



goud die precies even veel weegt. Dompel vervolgens de balans met de kroon en de klomp goud onder in een waterbassin. Als de balans doorslaat naar de kant van de goudklomp, heeft de smid gefraudeerd. Blijft de balans in evenwicht, dan is ook de kroon van zuiver goud.

Archimedes beseft namelijk dat beide voorwerpen in het water een opwaartse kracht (drijfvermogen) ondervinden, gelijk aan het gewicht van het eigen volume aan water. Als het lichtere zilver in de kroon is bijgemengd, heeft deze meer volume dan de goudklomp en dus meer drijfvermogen.

Overigens zou deze test nu minder zekerheid geven: plutonium is nog net iets zwaarder dan goud, dus zou de frauduleuze smid door bijmengen

van plutonium en zilver een kroon kunnen maken met precies hetzelfde volume als de goudklomp.

PALIMPSEST In Archimedes' tijd bestonden er geen universiteiten, geen betaalde banen voor onderzoekers of wetenschappelijke tijdschriften waarin die onderzoekers konden publiceren. Archimedes beschreef zijn ontdekkingen daarom in brieven – opgerolde vellen papyrus – die hij per schip naar vrienden in Alexandrië (Egypte) stuurde. Daar was een grote en beroemde bibliotheek waarin afschriften van die brieven werden bewaard. In de eerste eeuwen na Christus werden afschriften op papyrus heel geleidelijk vervangen door het duurzamere perkament (gemaakt van dierenhuid).

De bibliotheek van Alexandrië is later in vlammen opgegaan, maar gelukkig waren inmiddels afschriften van belangrijke werken over het Middellandse Zeegebied verspreid. Er is dus geen sprake van dat enig, door Archimedes zelf geschreven, werk nog bewaard is gebleven. Sterker nog, we weten dat van sommig werk zelfs geen afschriften bewaard zijn gebleven, omdat de titels door anderen genoemd worden maar de tekst nergens is teruggevonden.

Het was dan ook een sensatie toen in 1907 in Constantinopel een palimpsest opdook met nooit eerder gevonden afschriften van teksten van Ar-

chimedes. Een palimpsest is een beschreven perkament dat is schoongeschrapt en opnieuw beschreven. Dit gebeurde in de middeleeuwen veel, omdat perkament toen schaars en duur was. De teksten van Archimedes op deze palimpsest – *Codex C* genaamd – waren vrijwel onleesbaar door het schrappen en doordat er christelijke teksten overheen geschreven waren.

In de chaos na de Eerste Wereldoorlog verdween ook *Codex C* ergens tussen Turkije en Griekenland uit het zicht, tot hij eind jaren negentig weer opdook in Frankrijk en geveild werd door Christie's in New York. Een anonieme koper betaalde 2,2 miljoen dollar voor het beschimmelde, door brand aangetaste en vrijwel onleesbare boekje.

RESTAURATIE De Archimedes-palimpsest is nu in het Walters Art Museum in Baltimore, waar deze de afgelopen jaren gerestaureerd is en waar de teksten met geavanceerde beeldtechnieken weer deels leesbaar zijn gemaakt. Conservator van dat museum William Noel schreef er in 2007 samen met wiskundig historicus Reviel Netz een boek over, *De Archimedes-codex*, waarin zijn hoofdpersoon zo met hem op de loop gaat dat hij hem zo ongeveer tot het grootste genie ooit uitroept.

De achterflap van de Nederlandse vertaling van het boek maakt het nog bonter: 'Archimedes (wist)



Een losgehaald folio uit de Archimedes-palimpsest, gefotografeerd bij verschillende kleuren LED-licht. Horizontaal de religieuze tekst van een middeleeuwse monnik, verticaal de oudere Archimedes-tekst die was weggeschrapt om het perkament opnieuw te kunnen gebruiken. (Bron: de (anonieme!) eigenaar van de Archimedes-palimpsest.)

2200 jaar geleden meer van wis- en natuurkunde dan Isaac Newton in de zeventiende eeuw.' Dat is natuurlijk kletsboek. Archimedes wist niet dat de aarde om de zon draaide of dat licht een golfverschijnsel is. Hij kon van sommige krommen de oppervlakte bepalen door ingenieuze ad hoc-constructies, maar had niet, zoals Newton, een algemeen toepasbare methode, en zo liggen de voorbeelden voor het oprapen.

Hoewel het boek af en toe te gedetailleerd en nogal warrig is, weet Noel heel veel van oude manuscripten en hij weet heel goed over te brengen hoe fascinerend het is om het gedachtengoed te reconstrueren van iemand die 2200 jaar geleden leefde. En dat geldt heus niet alleen maar voor bibliothecarissen.

De anonieme koper gaf de Archimedes-codex voor onbepaalde tijd te leen aan het Walters museum en betaalde ook nog de specialisten en de modernste apparatuur om de bijna weggeschaapte teksten en diagrammen weer zichtbaar te maken. Zelfs een van de grootste deeltjesversnellers ter wereld, de Stanford Lineair Accelerator, kwam er aan te pas om met röntgenstraling de laatste restjes tekst uit de vergane bladzijden te destilleren.

DODENDE STRAAL Noel en Netz willen uit die nieuw ontdekte tekstfragmenten te verstrekkende conclusies trekken, namelijk dat Archimedes eigenlijk Newton en Leibniz het gras al voor de voeten had weggemaaid. Enigszins begrijpelijk is dat wel: op een historisch personage waarvan we maar heel

fragmentarische kennis hebben, hebben ook anderen graag hun favoriete mythes geprojecteerd.

Een van de fantastische prestaties die door antieke geschiedschrijvers aan Archimedes werden toegeschreven, was een brandglas dat op afstand vijandelijke schepen in brand stak. We kennen het principe allemaal van het vergrootglas waarmee je buiten – mits de zon schijnt – een fikkie kunt stecken.

Volgens Griekse en Romeinse historici bouwde Archimedes deze antieke voorloper van Star Wars tijdens de Romeinse belegering van Syracuse. Er zijn diverse pogingen ondernomen om dit sterke staaltje experimenteel te testen. Dat Archimedes dit presteerde met een gigantisch brandglas is uitgesloten. Daar is een lens met een diameter van meters voor nodig, en het slijpen van zo'n lens is zelfs tegenwoordig technisch vrijwel niet te doen. Maar ook een parabolische spiegel kan zonlicht in één punt concentreren, en het is relatief eenvoudig om met een groot aantal kleine, vlakke spiegels de vorm van een parabool te benaderen.

Archimedes bewees dat de oppervlakte onder een paraboolsegment gelijk is aan $4/3$ maal de oppervlakte van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Hij gebruikte daarvoor een redenering die een curieuze mix was van de hefboomregel uit de natuurkunde en een voorloper van het door Newton ontdekte integreren. Eerst bewees hij met ook nu nog gangbare redeneringen over verhoudingen tussen lijnstukken dat

$$|MX| : |SH| = |TK| : |KN| \quad (*)$$

(TK is per definitie even lang als KC, en SH is het parallel verplaatste lijnstuk OX), met MX een willekeurig gekozen lijn parallel aan de as BD van de parabool.

Archimedes doet nu alsof de lijnstukken MX en SH fysieke objecten zijn, die aan de balans TN met draaipunt K hangen. Uit (*) en zijn eigen hefboomregel volgt dat die twee lijnstukken in balans zijn. Maar anderzijds is de lijn MX een willekeurige parallel, en SH heeft altijd dezelfde lengte als het stuk van MX onder de parabool, OX.

Hieruit concludeert Archimedes dat wat voor één lijnstuk geldt, ook geldig moet zijn voor de (oneindig grote) verzameling lijnstukken die samen het paraboolsegment vormen. Dit is de stap die een voorproefje lijkt op Newtons en Leibniz' integraalrekening, zoals je dat in de vijfde



Het experiment met de spiegels op het MIT



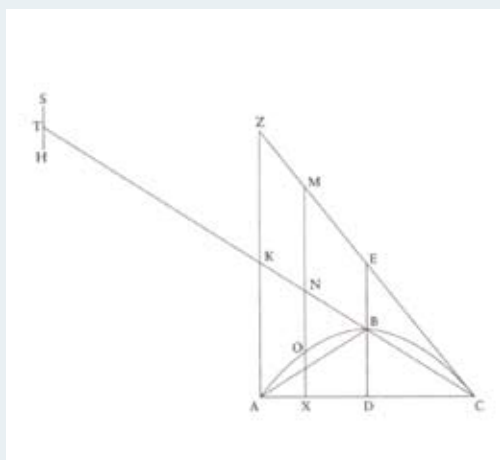
Het oorlogsschip dat op het MIT in brand werd gestoken

In oktober 2005 probeerden tientallen studenten van het Massachusetts Institute of Technology (een Amerikaanse universiteit) met 129 vlakke spiegels van 30 bij 30 centimeter een model van een Romeins houten oorlogsschip vanaf dertig meter afstand in brand te steken. Het lukte uiteindelijk wel, maar



De Mythbusters in actie

het bleek in de praktijk erg lastig. De gereflecteerde lichtvlekken van alle spiegels moesten natuurlijk op hetzelfde punt terecht komen, maar dat lukte slechts nauwkeurig door ze één voor één op een vast mikpunt te richten (terwijl de andere afgedekt waren). Vanwege de draaiing van de aarde verschuift het ge-



klas op school leert: een oppervlak wordt verdeeld in verticale strookjes waarvan de hoogte bekend is, waarna de breedte van de strookjes 'naar nul gaat' en het er dus oneindig veel worden, zodat je de exacte oppervlakte onder een kromme kunt bepalen (zie ook het artikel over Newton en Leibniz in het januarinumnummer van deze jaargang van *Pythagoras*).

Via nog een aantal redeneerstappen leidt Archimedes vervolgens af dat de driehoek AZC in balans zou zijn met het paraboolsegment ABC als dat aan de linkerkant van de balans hing. Omdat de linkerarm drie keer zo lang is als de rechterarm, is drie-

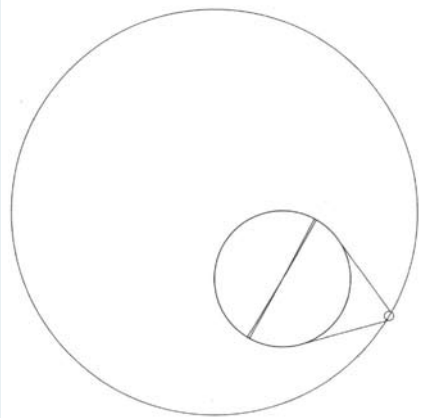
hoek AZC dus drie keer zo 'zwaar' als paraboolsegment ABC. Maar Archimedes had al eerder aangetoond (dat is niet heel moeilijk) dat driehoek AZC vier keer zo groot is als de ingeschreven driehoek ABC, waaruit de oppervlakteverhouding $4/3$ met het paraboolsegment ABC volgt.

De volledige redenering is ingenieus maar erg omslachtig en geldt bovendien alleen voor een parabool. Tegenwoordig zouden we zeggen, met Newton als leermeester: de vergelijking van deze parabool is te schrijven als $y = k^2 - x^2$, dus de oppervlakte van het segment boven de x -as is

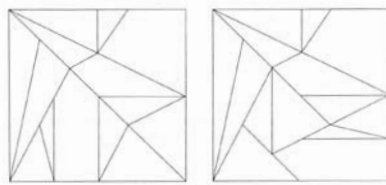
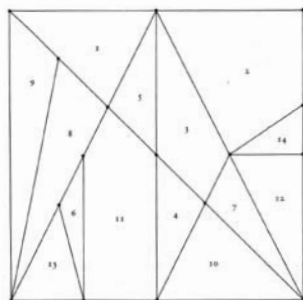
$$\int_{-k}^k y \, dx = \left[k^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-k}^k = \frac{4}{3} k^3.$$

De oppervlakte van de ingeschreven driehoek is $\frac{1}{2} \times 2k \times k^2 = k^3$, dus hun verhouding is $4/3$. Maar het hele idee dat een kromme kan worden beschreven door een formule, waar je dan slim mee kunt rekenen, is pas opgekomen in de tijd van Descartes, in de zeventiende eeuw.

Archimedes moest zich in bochten wringen om dergelijke resultaten zonder algebra en differentiaal- of integraalrekening af te leiden. Zijn bewijs dat het volume van een bol $2/3$ is van het volume van de cilinder waar hij precies in past, beschouwde hij zelf volgens de legende als zijn grootste prestatie, terwijl dit nu middelbare-school-stof is.



De waarde van het getal π is te benaderen door een regelmatige veelhoek in een cirkel te construeren. Als je begint met een zes-hoek, vind je $\pi \approx 3$. Archimedes slaagde erin de omtrek van een regelmatige 96-hoek te bepalen, en bepaalde zo dat de waarde van π lag tussen $\frac{223}{71}$ en $\frac{22}{7}$.



Deze puzzel, die waarschijnlijk niet door Archimedes zelf verzonnen is, was het onderwerp van zijn grotendeels verloren gegane verhandeling *Stomachion* ('maagpijn'). Nog leesbare fragmenten tekst in de *Codex C* wijzen er volgens Noel en Netz op, dat Archimedes bestudeerd heeft op hoeveel manieren van deze puzzel een vierkant gelegd kon worden. Hij zou daarmee de grondlegger van de combinatoriek zijn.

26 meenschappelijke brandpunt op die afstand met een meter of tien per uur, dus was ook precieze timing belangrijk. Verder bleek zelfs een beetje sluierbewolking al roet in het eten te gooien, omdat de reflecties van de spiegels te diffuus werden. Later probeerden Mythbusters Adam Savage en Jamie Hyneman in hun tv-programma hetzelfde met 300 vlakke spiegels. In beide gevallen lukt het onder ideale omstandigheden om op één, vooraf bepaald brandpunt hout tot ontvlaming te brengen. Is deze *myth* dus *confirmed*? De Mythbusters vonden van niet, en bestempelden het verhaal als *busted*.

In werkelijkheid is de vijand natuurlijk niet zo vriendelijk om op maar dertig meter van de kade voor anker te gaan, precies op de plek waar jouw 129 spiegels op gericht zijn. Zou je het brandpunt ook verder weg kunnen richten, zeg op honderd of duizend meter? Helaas: omdat de zon geen puntbron is, maar een schijf aan de hemel met een diameter van ongeveer een halve graad (ongeveer $1/114$ radiaal), reflecteert ook een perfect vlakke spiegel een bundel zonlicht die een halve graad divergeert. Je kunt simpel uitrekenen (elke 114 centimeter afstand komt er 1 centimeter bundeldiameter bij) dat de doorsne-

de van de bundel na dertig meter al ruim drie keer zo groot is als de spiegel, na honderd meter vijftien maal zo groot en na duizend meter negenhonderd maal. Om dezelfde lichtintensiteit als op dertig meter afstand te bereiken (en dat bepaalt hoe heet het er wordt) heb je dus respectievelijk minstens $129 \times 15 \approx 1900$ en $129 \times 900 \approx 116.000$ spiegels nodig.

Het kan bijna niet anders, of Archimedes beseftte dat ook en heeft niet eens geprobeerd zo'n dodende straal te maken. Hij concentreerde zich zelfs tijdens de belegering liever op z'n cirkels in het zand, en dat is hem fataal geworden. ■

MEER WETEN De Nederlandse vertaling van het boek van Reviel Netz en William Noel verscheen in 2007 onder de titel *De Archimedes-codex, de geheimen van een opzienbarende palimpsest ontsluit* (ISBN 978 90 253 6322 2). De website www.archimedespalimpsest.org bevat uitgebreide informatie, met veel beeldmateriaal, over de Archimedes-codex. De experimenten op MIT en bij Mythbusters zijn te vinden op http://web.mit.edu/2.009/www/experiments/deathray/10_Mythbusters.html#details.