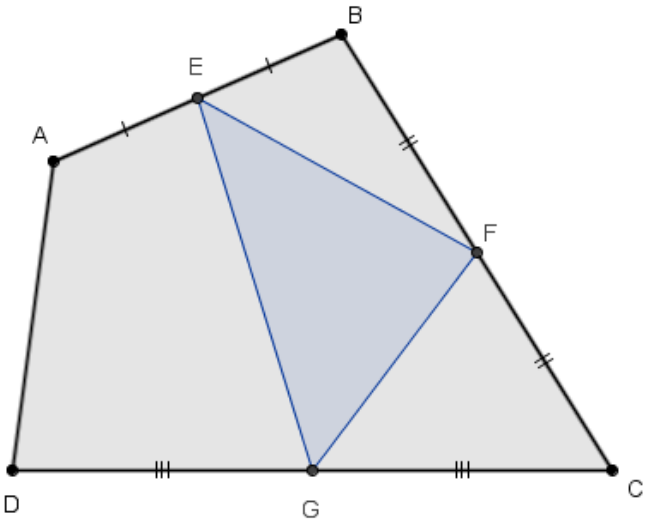
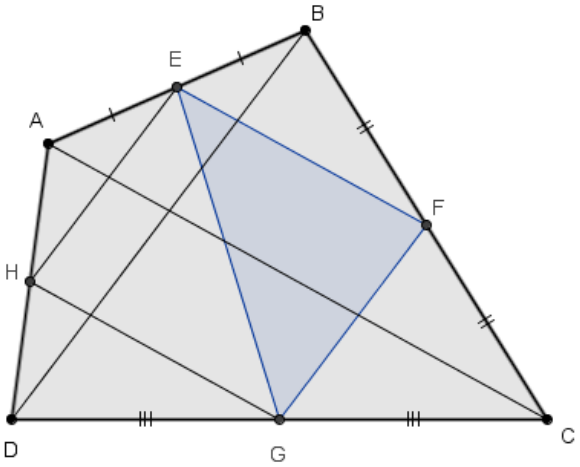
PROBLEEM 3

De punten E, F en G zijn resp. de middens van de zijden [AB], [BC] en [CD] van een willekeurige vierhoek ABCD. Toon aan dat de oppervlakte van de driehoek EFG gelijk is aan het vierde deel van de oppervlakte van de vierhoek ABCD.



$$opp.\Delta EFG = \frac{opp.ABCD}{4}$$

Bewijs



Noem H het midden van de zijde [AD]. Volgens de stelling van Varignon is de vierhoek EFGH een parallellogram. Immers, IEFI is middenparallel in ΔABC en IGHI is middenparallel in ΔACD, zodat IEFI = IGHI en EF // GH. Uiteraard is de oppervlakte van driehoek EFG dan gelijk aan de helft van de oppervlakte van het parallellogram EFGH.

Nu is
$opp.\Delta AEH = \frac{1}{4}\ opp.\Delta ABD$, $opp.\Delta EBF = \frac{1}{4}\ opp.\Delta ABC$, $opp.\Delta FCG = \frac{1}{4}\ opp.\Delta BCD$ en

$opp.\Delta GDH = \frac{1}{4}\ opp.\Delta CDA$ (E, F, G en H zijn immers de middens van de zijden van de

vierhoek ABCD). De som van de linkerleden van deze vier gelijkheden is dan gelijk aan

opp. ABCD – opp. EFGH.

De som van de rechterleden van deze vier gelijkheden is gelijk aan $\frac{1}{4}(2\ opp.ABCD)$.
Uit

$$opp.ABCD - opp.EFGH = \frac{1}{2}\ opp.ABCD$$

en

$$opp.\Delta EFG = \frac{1}{2}\ opp.EFGH$$

volgt dat $$opp.\Delta EFG = \frac{1}{4}\ opp.ABCD.$$