2014-18

WISKUNDE IS (EEN BEETJE) OORLOG

WISKUNDE IS (EEN BEETJE) OORLOG

Onder dit motto nodigde de VVWL alle wiskundeleraren uit Vlaanderen en Nederland uit om deel te nemen aan een wiskundewedstrijd. De tien vragen van de eerste editie, waarbij er telkens een constante moest bepaald worden, verschenen in Wiskunde & Onderwijs nr. 160.

Hierbij geven we de antwoorden en bewijzen we meteen ook hoe de constanten kunnen bepaald worden.

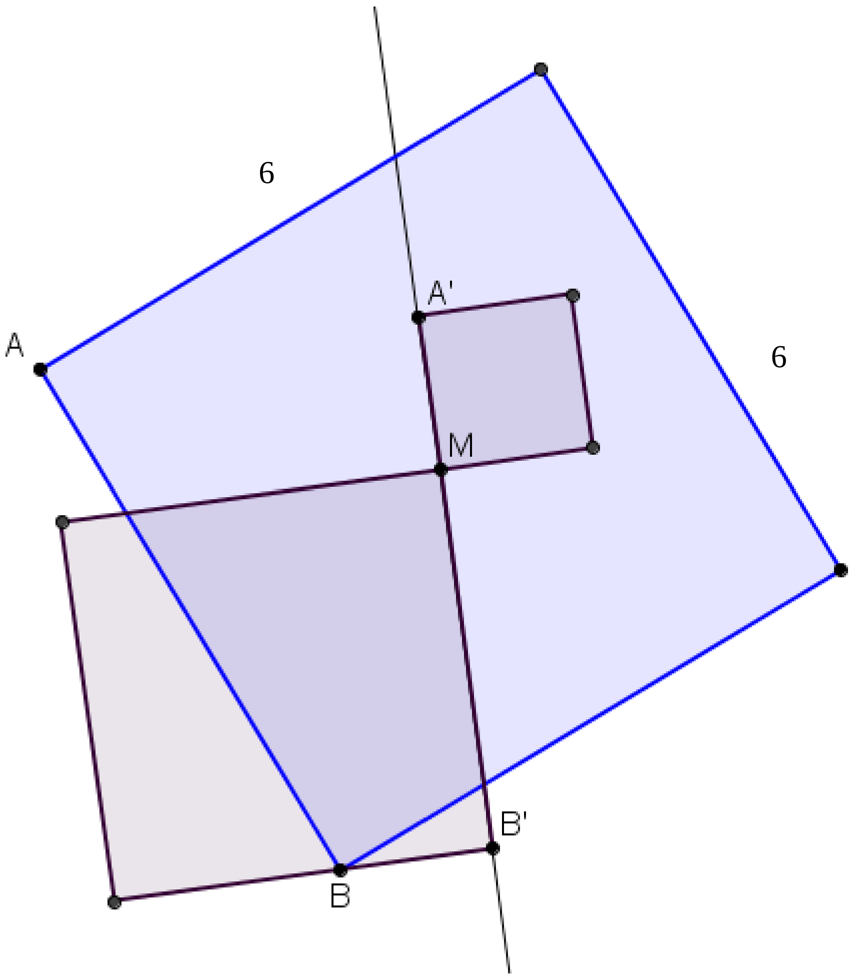
Deze competitie heeft op de eerste plaats als doel het probleemoplossend denken aan te moedigen. De wedstrijd zal vier edities kennen (van 2014 tot 2018 – met een knipoogje naar de herdenking van Wereldoorlog I).

Met dank aan de sponsors.

CONSTANTE 1

A' en B' zijn de loodrechte projecties van twee opeenvolgende hoekpunten A en B van een vierkant met zijde 6 op een variabele rechte door het middelpunt M van het vierkant.

- **a. Toon aan dat de som van de oppervlakten van de twee vierkanten met zijden respectievelijk |MA'| en |MB'| constant is.**
- **b. Hoeveel is die constante?**



OPLOSSING.

a. $\Delta AA'M$ is congruent met $\Delta MB'B$ (waarom?) en dus is $|AA'| = |MB'|$.

Dan is $|MA'|^2 + |MB'|^2 = |MA'|^2 + |AA'|^2$

$= |AM|^2$ (wegens de stelling van Pythagoras)

$=$ constant $(= \frac{1}{2}|AB|^2)$.

b. De gezochte constante is 18.

CONSTANTE 2

a. Toon aan dat voor elk positief geheel getal n de volgende uitdrukking constant is:

$$\frac{\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)}}{\mathbf{(2n+1)+\ (2n+3)+\ (2n+5)+\ \ldots(4n-1)}}.$$

b. Hoeveel is die constante?

OPLOSSING.

a. Pas op de teller en de noemer de formule toe voor de som van de eerste n termen van een rekenkundige rij:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2$$

en

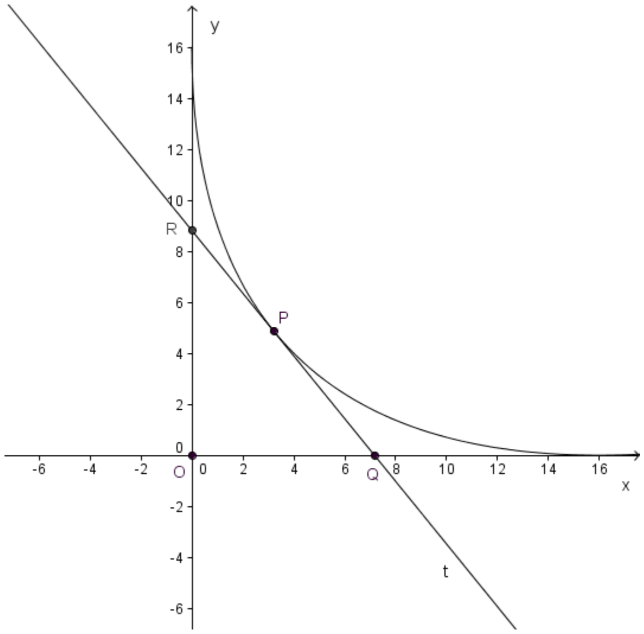
$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\ \ldots+(4n-1)=\frac{[(2n+1)+(4n-1)]n}{2}=3n^2.$$

b. De constante is $\frac{1}{3}$.

CONSTANTE 3

P is een variabel punt op de grafiek van de kromme $\mathcal{K}$ bepaald door $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$.
De raaklijn t aan $\mathcal{K}$ in het punt P snijdt de x-as in het punt Q en de y-as in het punt R.

a. Bewijs dat |OQ| + |OR| constant is.
b. Hoeveel is die constante?



OPLOSSING.

a. Stel P(a,b) met $0 \le a \le 4$ en $0 \le b \le 4$. Dan is $\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$. $(*)$

Via impliciet afleiden van $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ vinden we dat

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$$

zodat

$$y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Dan is de vergelijking van de raaklijn t in P(a,b):

$$y-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a),$$

zodat

$$|OQ|=a+\sqrt{ab}\,,\quad |OR|=\sqrt{ab}+b$$

en

$$|OQ|+|OR|=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=16 \text{ (wegens (*)).}$$

b. De constante is 16.

CONSTANTE 4

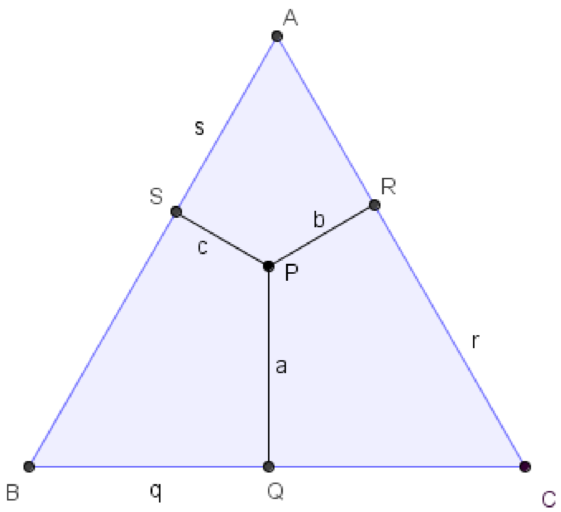
P is een willekeurig punt binnen een gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 4.
De punten Q, R en S zijn respectievelijk de loodrechte projecties van P op de zijden [BC], [CA] en [AB] .

a. Toon aan:
(1) $|PQ| + |PR| + |PS|$ is constant
(2) $|AS| + |BQ| + |CR|$ is constant

of met de notaties op de nevenstaande figuur:

(1) $c_1 = a + b + c$ is constant
(2) $c_2 = q + r + s$ is constant.

b. Bepaal de constante $c_1 + c_2$.



OPLOSSING.

(1) Dit is de stelling van Viviani.
Als z de zijde is en h de hoogte van Δ ABC, dan is

$$opp.\Delta\, ABC = opp.\Delta\, PBC + opp.\Delta\, PAC + opp.\Delta\, PAB$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{zh}{2} = \frac{za}{2} + \frac{zb}{2} + \frac{zc}{2}$$

zodat $a + b + c = h$.

$c_1 = h = \sqrt{12}.$

(2) Via de stelling van Pythagoras is

$$\begin{aligned} & s^2 + c^2 = (z-r)^2 + b^2 \\ & q^2 + a^2 = (z-s)^2 + c^2 \\ + \quad & r^2 + b^2 = (z-q)^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$(q^2 + r^2 + s^2) + (a^2 + b^2 + c^2) = (q^2 + r^2 + s^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 3z^2 - 2z(q + r + s)$$

waaruit volgt dat

$$q + r + s = \frac{3z}{2}.$$

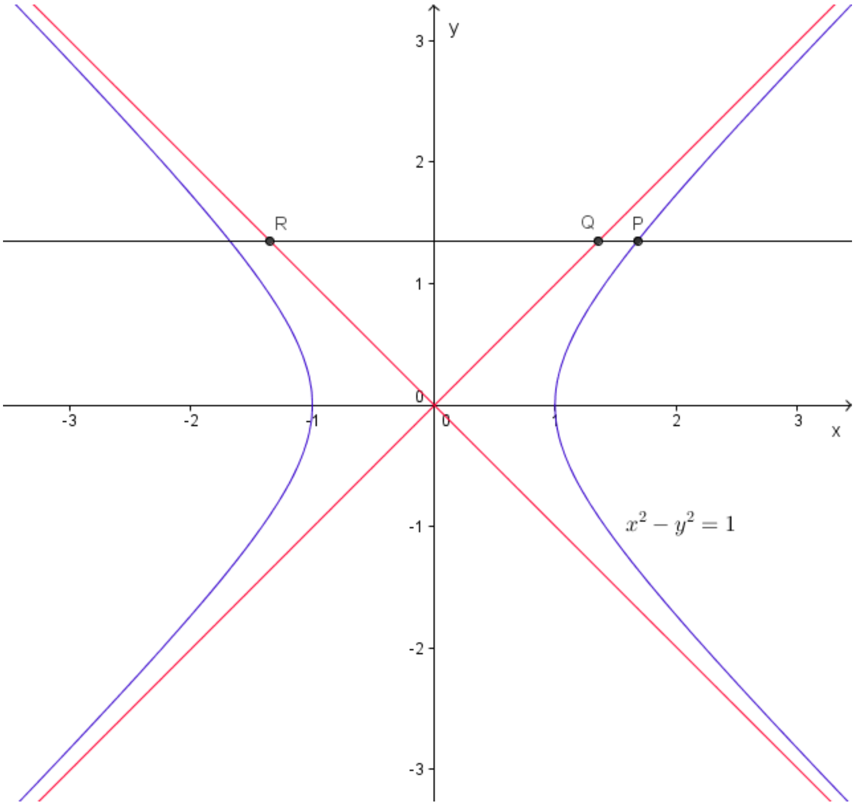
$c_2 = 6.$

$c_1 + c_2 = \sqrt{12} + 6 = 6 + 2\sqrt{3}.$

CONSTANTE 5

P is een willekeurig punt op de hyperbool $\mathcal{H}$: $x^2 – y^2 = 1$.
Een rechte door P evenwijdig met de x-as snijdt de asymptoten van deze hyperbool respectievelijk in de punten Q en R.

a. **Toon aan dat het product |PQ| |PR| constant is.**
b. **Hoeveel is die constante?**



OPLOSSING.

De asymptoten van de hyperbool $\mathcal{H}$ hebben als vergelijking y = x en y = -x.
Kies een punt P(a, b) op $\mathcal{H}$ dan is $a^2 – b^2 = 1$. (*)
De horizontale rechte y = b snijdt de asymptoten in Q(b, b) en R(-b, b) zodat

|PQ| |PR| = |a – b| |a + b| = $|a^2 – b^2|$ = 1 (wegens (*)).

Opmerkingen.

1. Men kan een analoge eigenschap bewijzen voor een verticale rechte door P(a, b).
2. Deze eigenschap kan men ook in het algemeen bewijzen voor een hyperbool

$$\mathrm{H} : \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

De asymptoten van deze hyperbool hebben als vergelijking $y = \frac{b}{a}x \ \ en \ y = -\frac{b}{a}x.$

CONSTANTE 6

**Schrijf onder elkaar twee willekeurige strikt positieve gehele getallen op.
Schrijf daaronder het derde getal dat de som is van de eerste twee.
Zet daaronder het vierde getal dat de som is van het tweede en het derde.
Ga zo verder tot en met het tiende getal (dat de som is van het achtste en het negende getal).**

Tel vervolgens de tien getallen bij elkaar op en deel deze som door het zevende getal uit de rij.

- **a. Toon aan dat het quotiënt constant is (onafhankelijk van de twee gekozen startgetallen).**
- **b. Hoeveel is die constante?**

OPLOSSING.

a. Vertrek met de getallen a en b:

$$\begin{array}{r} a \\ b \\ a + b \\ a + 2b \\ 2a + 3b \\ 3a + 5b \\ 5a + 8b \\ 8a + 13b \\ 13a + 21b \\ +\ 21a + 34b \\ \hline 55a + 88b \end{array}$$

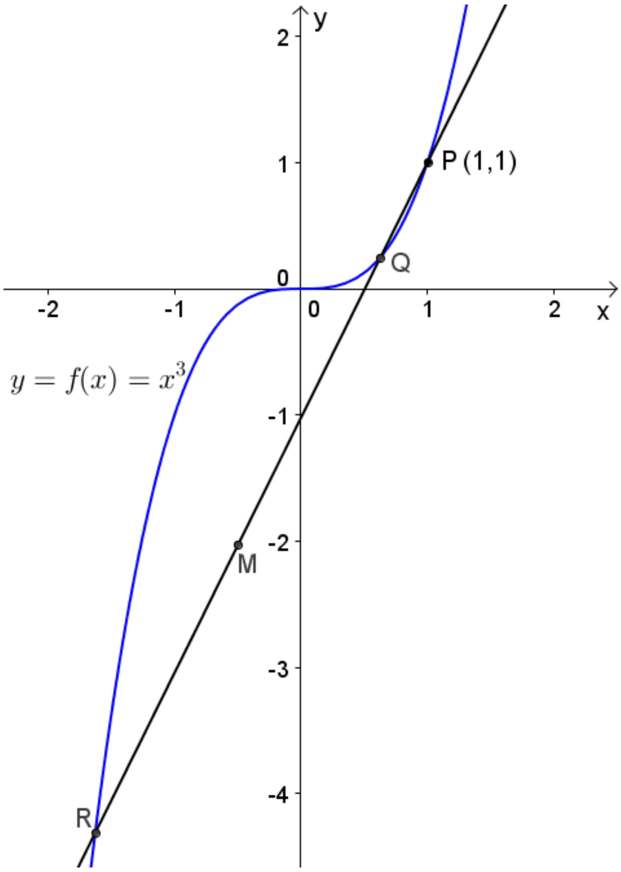
$55a + 88b$ en $(55a + 88b) : (5a + 8b) = 11$.

b. De constant is 11.

CONSTANTE 7

Op de grafiek van de veeltermfunctie met als voorschrift y = f(x) = x^3 kiest men het punt P(1,1). Een variabele rechte door P snijdt de grafiek van f in de punten Q en R.

a. **Toon aan dat de abscis (het eerste coördinaatgetal) van het midden M van het lijnstuk [QR] constant is.**
b. **Hoeveel is die constante?**



OPLOSSING.

Als m de richtingscoëfficiënt is van de variabele rechte door P dan heeft deze rechte als vergelijking y – 1 = m(x – 1).
De snijpunten van deze rechte met de grafiek van y = x^3 zijn de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} y - 1 = m(x-1) \\ y = x^3 \end{cases}$$

en bijgevolg zijn de absciswaarden van de drie snijpunten de oplossingen van $x^3 - 1 = m(x-1)$, waarbij $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. De absciswaarden x_Q en x_R van Q en R zijn dan de oplossingen van $x^2 + x + 1 = m$ of van $x^2 + x + (1-m) = 0$, zodat $x_Q + x_R = -1$ (som van de oplossingen van een vierkantsvergelijking).

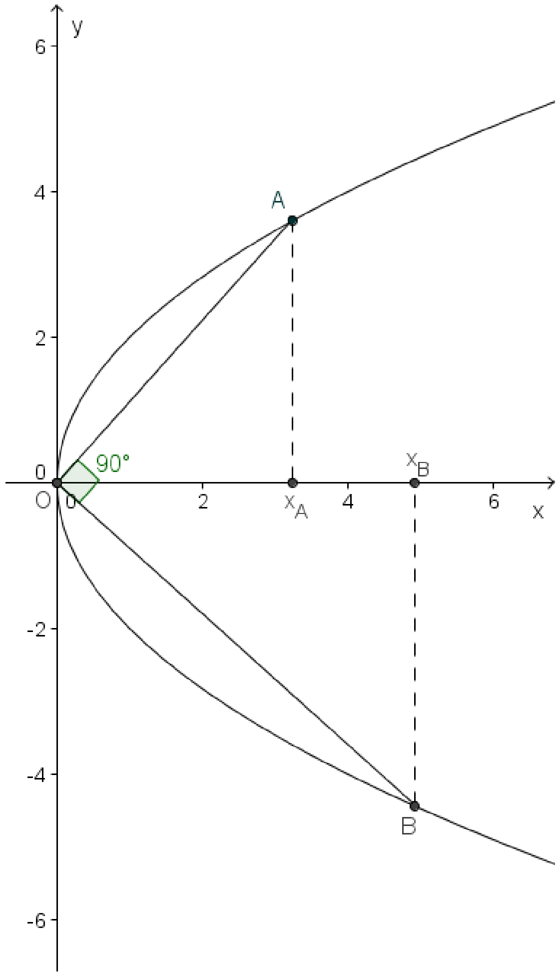
Dan is

$$x_M = \frac{x_Q + x_R}{2} = -\frac{1}{2}.$$

CONSTANTE 8

O is de top van de parabool met als vergelijking $y^2 = 4x$.
A en B zijn twee punten op de parabool zodat de koorden [OA] en [OB] loodrecht op elkaar staan.

a. **Bewijs dat het product $x_A\, x_B$ van de abscissen van de punten A en B constant is (d.w.z. onafhankelijk van de keuze van de A en B).**
b. **Hoeveel is die constante?**



OPLOSSING.

Stel dat de vergelijking van OA y = mx is, dan is de vergelijking van OB $y = -\frac{1}{m}x$, want dan is het product van de richtingscoëfficiënten van deze twee rechten $m\,.\left(-\frac{1}{m}\right) = -1$.

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow m^2x^2 = 4x$, waaruit volgt dat $x_A = \frac{4}{m^2}$.

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -\frac{1}{m}x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m^2}x^2 = 4x$, waaruit volgt dat $x_B = 4m^2$.

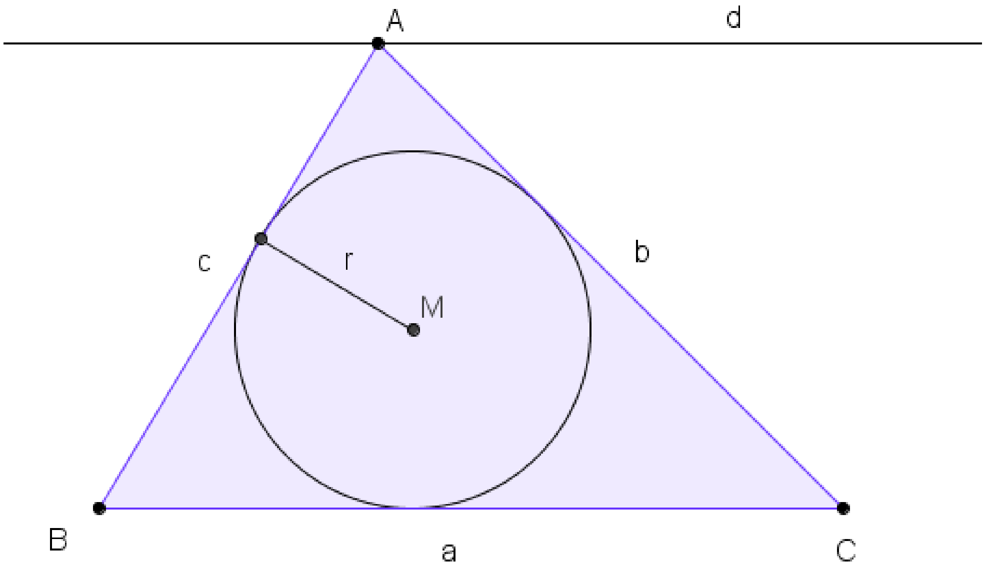
Dan is $x_A\, x_B = 16$.

CONSTANTE 9

Driehoek ABC is een willekeurige driehoek met basis [BC] en top A. Door de top A trekt men de rechte d evenwijdig met BC. M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

a. Als het punt A de rechte d doorloopt, dan blijft het product van de omtrek van driehoek met de straal van de ingeschreven cirkel constant.
Met de notaties van de onderstaande figuur: (a + b + c) · r is constant.
Toon dit aan.

b. Hoeveel is die constante als driehoek ABC een rechthoekige driehoek is met zijden 3, 4 en 5?



OPLOSSING.

a. We merken vooraf op dat de oppervlakte van driehoek ABC niet wijzigt als A de rechte d doorloopt (zelfde basis en zelfde hoogte).

Opp. Δ ABC = opp. Δ MAB + opp. Δ MBC + opp. Δ MAC

$$= \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2}$$

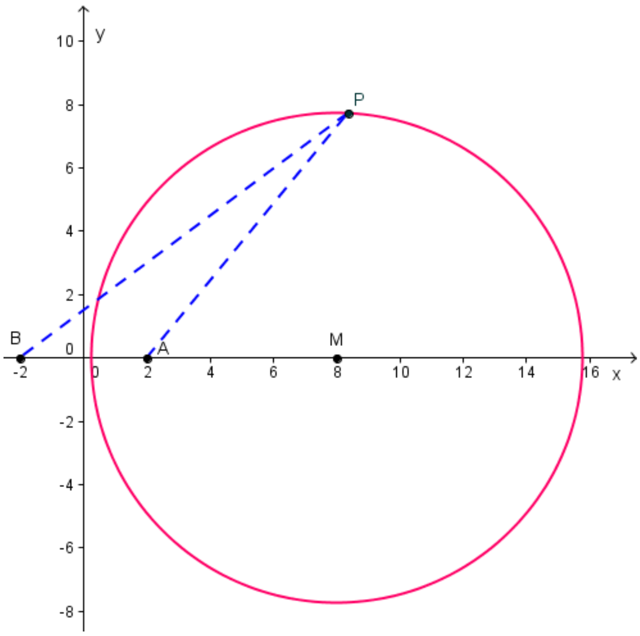
zodat (a + b + c) · r $= 2$ opp.Δ ABC .

b. Voor een 3-4-5-driehoek is die constante 12.

CONSTANTE 10

Voor elk punt P op de cirkel met als vergelijking $(x-8)^2 + y^2 = 60$ geldt dat de verhouding van de afstanden van P tot de punten A(2,0) en B(-2,0) constant is.

a. **Bewijs dit.**
b. **Hoeveel is die constante?**



OPLOSSING.

De cirkel heeft M(8,0) als middelpunt en $\sqrt{60}$ als straal.
Dan zijn parametervergelijkingen van deze cirkel:

$$\begin{cases} x = 8 + \sqrt{60}\,\cos t \\ y = \sqrt{60}\,\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{\sqrt{\left(6+\sqrt{60}\cos t\right)^2 + (\sqrt{60}\ \sin t)^2}}{\sqrt{\left(10+\sqrt{60}\cos t\right)^2 + (\sqrt{60}\ \sin t)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{96 + 12\sqrt{60}\cos t}}{\sqrt{160 + 20\sqrt{60}\cos t}}$$

$$= \sqrt{\frac{12(8+\sqrt{60}\cos t)}{20(8+\sqrt{60}\cos t)}}$$

$$= \sqrt{0{,}6}\,.$$

Luc Gheysens lucgheysens@yahoo.com
Populierenlaan 10, 8520 Kuurne
ere-pedagogisch adviseur
wiskundeblog: www.gnomon.bloggen.be

Daniël Tant <tant.daniel@telenet.be>
Beekstraat 61, 8730 Oedelem
is tevens hoofdredacteur van dit tijdschrift