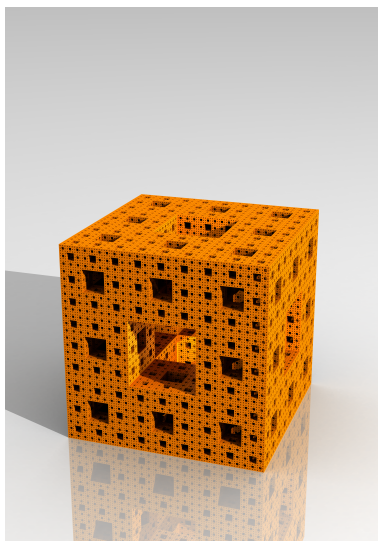


Imagine ∞

1 Inleiding

De figuur op de poster van VWO toont ons de “Spons van Menger”, genoemd naar de wiskundige Karl Menger. Wanneer we de figuur volledig uitzoomen, ziet de Spons van Menger er als volgt uit:

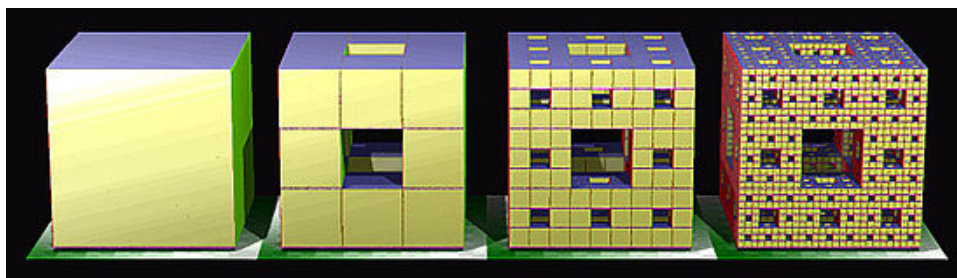


Figuur 1: De Spons van Menger

Maar wat heeft deze figuur te maken met de slogan “Imagine ∞ ”? Om het antwoord op deze vraag te kennen, moeten we eerst eens kijken hoe de figuur ontstaat.

2 Constructie

Op de onderstaande illustratie wordt duidelijk hoe de Spons van Menger ontstaat:



Figuur 2: Opbouw Spons van Menger

Bron: Wikipedia

Een klein woordje uitleg is hierbij op zijn plaats. Om de Spons van Menger te verkrijgen, starten we met een kubus. Dit kunnen we stap 0 noemen. Vervolgens verdelen we elk vierkant (op dit ogenblik zijn dit dus de zes zijden van de kubus) in negen congruente vierkantjes. Zo ontstaan er 27 congruente kubusjes die elk een ribbe hebben die gelijk is aan een derde van de ribbe van de oorspronkelijke kubus. Verder nemen we bij iedere zijde het middelste kubusje weg alsook het kubusje in het midden van de grote kubus. Na deze eerste stap is onze grote kubus vervangen door $27 - 6 - 1 = 20$ kubusjes.

Dit proces gaan we nu herhalen. Elk vierkant verdelen we opnieuw in negen congruente vierkantjes waardoor elk van de 20 kubusjes vervangen wordt door 27 kleinere kubusjes waarvan we er opnieuw zeven wegnemen. Na deze tweede stap ontstaan er zo dus $20 \cdot 20 = 20^2$ kubusjes.

De Spons van Menger ontstaat door dit *iteratieproces* oneindig lang verder te zetten.

3 Volume van de Spons van Menger

De Spons van Menger heeft verschillende speciale eigenschappen. Een ervan is de eigenschap dat de Spons van Menger geen volume heeft. Dit klinkt op het eerste zicht wat vreemd (en dat is het misschien ook), maar toch kunnen we dit wiskundig zeer eenvoudig bewijzen.

Zoals we hierboven reeds hebben aangegeven, wordt elke kubus in een volgende stap vervangen door 20 kleinere kubusjes. Na de eerste stap hebben we zo 20 kubusjes, na de tweede stap worden dit $20 \cdot 20 = 20^2$ kubusjes en na de derde stap krijgen we al $20^2 \cdot 20 = 20^3$ kubusjes. Meer algemeen kunnen we dus stellen dat we na n stappen 20^n kubusjes hebben.

Maar wat gebeurt er met de ribben van die kubusjes? In iedere stap worden die ribben in drie gelijke delen verdeeld. Als we starten met een kubus met ribbe 1 betekent dit dat elk van de 20 kubusjes na de eerste stap een ribbe heeft die gelijk is aan $\frac{1}{3}$. Na de tweede stap hebben de nieuwe kubusjes dan een ribbe die gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$. Meer algemeen kunnen we dus zeggen dat de ribbe van een van de kubusjes na stap n gelijk is aan $\frac{1}{3^n}$.

Nu we het aantal kubusjes met de bijbehorende ribbe na stap n kennen, is het eenvoudig om het volume van de figuur na n stappen te berekenen. Als we met $V(n)$ het totale volume van de figuur na n stappen noteren, dan volgt uit het voorgaande dat

$$V(n) = 20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

Naarmate n groter wordt, zal $V(n)$ steeds kleiner worden:

n	$V(n)$
1	0,740740...
2	0,548696...
3	0,406442...
$\vdots$	$\vdots$
10	0,049735...
$\vdots$	$\vdots$
50	0,00000030...
$\vdots$	$\vdots$

Wiskundig zeggen we dat de limiet van $V(n)$ gelijk is aan 0 als n naar oneindig gaat. We noteren dit als

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(n) = 0.$$

4 Oppervlakte van de Spons van Menger

Nu we weten dat de Spons van Menger geen volume heeft, kunnen we eens naar de oppervlakte ervan kijken. En dat het resultaat nog verrassender is dan het vorige zal meteen blijken.

Om het volume van de Spons van Menger te berekenen, moesten we het aantal kubusjes na iedere stap kennen. Opdat we nu de oppervlakte na stap n zouden kennen, moeten we in de eerste plaats weten wat het aantal vierkantjes is. We gaan dit stap voor stap bekijken.

We starten uiteraard met 6 vierkanten, namelijk de zes zijden van de kubus in stap 0. Wat gebeurt er nu in stap 1? Elke zijde wordt in de eerste plaats vervangen door 8 vierkantjes. Het totale aantal vierkantjes is dus minstens $6 \cdot 8$. Maar bovendien zit er na de eerste stap in iedere zijde een "gat" waarin we nog eens 4 vierkantjes tellen. Het totale aantal vierkantjes na de eerste stap is dus gelijk aan

$$6 \cdot 8 + 6 \cdot 4.$$

Na stap 2 zijn opnieuw alle vierkantjes vervangen door 8 kleinere vierkantjes waardoor het totale aantal vierkantjes minstens gelijk is $8 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 4)$. Maar na stap 2 zijn er in elk van de 20 kubusjes zes gaten bijgekomen die elk vier vierkantjes bevatten. Het totale aantal vierkantjes na de tweede stap is dus gelijk aan

$$8 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 4) + 20 \cdot 6 \cdot 4 = 8^2 \cdot 6 + 8 \cdot 24 + 20 \cdot 24.$$

We proberen een algemene formule te vinden voor het aantal vierkantjes na stap n en bekijken nog eens wat er gebeurt na stap 3. Opnieuw wordt elk vierkantje vervangen door 8 kleinere vierkantjes wat het totale aantal op ten minste $8 \cdot (8^2 \cdot 6 + 8 \cdot 24 + 20 \cdot 24)$ brengt. Maar weer zijn er bij elk van de 20^2 kubusjes 6 gaten bijgekomen die elk 4 vierkantjes tellen. Het aantal vierkantjes na stap 3 is dus gelijk aan

$$8 \cdot (8^2 \cdot 6 + 8 \cdot 24 + 20 \cdot 24) + 20^2 \cdot 6 \cdot 4 = 8^3 \cdot 6 + 8^2 \cdot 24 + 8 \cdot 20 \cdot 24 + 20^2 \cdot 24.$$

Probeer nu zelf te beredeneren waarom het aantal kubusjes na de vierde stap gelijk is aan

$$8^4 \cdot 6 + 8^3 \cdot 24 + 8^2 \cdot 20 \cdot 24 + 8 \cdot 20^2 \cdot 24 + 20^3 \cdot 24.$$

Wanneer we met $A(n)$ het aantal vierkantjes na stap n noteren, dan vinden we dus reeds

$$\begin{aligned} A(0) &= 6 \\ A(1) &= 8 \cdot 6 + 24 \\ A(2) &= 8^2 \cdot 6 + 8 \cdot 24 + 20 \cdot 24 \\ A(3) &= 8^3 \cdot 6 + 8^2 \cdot 24 + 8 \cdot 20 \cdot 24 + 20^2 \cdot 24 \\ A(4) &= 8^4 \cdot 6 + 8^3 \cdot 24 + 8^2 \cdot 20 \cdot 24 + 8 \cdot 20^2 \cdot 24 + 20^3 \cdot 24 \end{aligned}$$

We zien hierin al enige regelmaat ontstaan, maar de term $8^3 \cdot 24 + 8^2 \cdot 20 \cdot 24 + 8 \cdot 20^2 \cdot 24 + 20^3 \cdot 24$ moeten we nog wat herschrijven. Meer precies staat hier de som van de eerste vier termen van de meetkundige rij waarvan de eerste term gelijk is aan $8^3 \cdot 24$ en de reden van de rij gelijk is aan $\frac{20}{8}$. Aangezien de som van de eerste n termen van een meetkundige rij

met reden q en eerste term a_1 gelijk is aan $a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ is

$$\begin{aligned} 8^3 \cdot 24 + 8^2 \cdot 20 \cdot 24 + 8 \cdot 20^2 \cdot 24 + 20^3 \cdot 24 &= 8^3 \cdot 24 \cdot \frac{\left(\frac{20}{8}\right)^4 - 1}{\frac{20}{8} - 1} \\ &= 8^3 \cdot 24 \cdot \frac{8}{12} \cdot \left(\frac{20^4}{8^4} - 1\right) \\ &= 2 \cdot 20^4 - 2 \cdot 8^4 \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$A(4) = 8^4 \cdot 6 + 2 \cdot 20^4 - 2 \cdot 8^4 = 4 \cdot 8^4 + 2 \cdot 20^4.$$

De stap naar de algemene term $A(n)$ is nu rap gemaakt. Probeer voor jezelf in te zien waarom

$$A(n) = 4 \cdot 8^n + 2 \cdot 20^n.$$

Om de totale oppervlakte van het aantal vierkantjes te kennen na stap n hebben we enkel nog de lengte van de zijde na stap n nodig. Maar hierboven hadden we reeds gevonden dat de zijde van dat vierkantje na stap n gelijk is aan $\frac{1}{3^n}$. Noteren we met $O(n)$ de totale oppervlakte na stap n , dan geldt dus

$$O(n) = A(n) \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{4 \cdot 8^n + 2 \cdot 20^n}{9^n}.$$

Tot slot bekijken we nu wat er gebeurt met de oppervlakte als we n steeds groter laten worden:

n	$O(n)$
0	6
1	8
2	13,037037...
3	24,757201...
$\vdots$	$\vdots$
10	5874,838422...
$\vdots$	$\vdots$

Naarmate n groter wordt, zal de oppervlakte ook steeds groter worden. Wiskundig betekent dit dat de oppervlakte oneindig groot zal worden naarmate n groter wordt. We noteren dit als

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} O(n) = +\infty.$$

De totale oppervlakte van de Spons van Menger is dus oneindig groot!

5 Conclusie

Waarom hoort de slogan “Imagine ∞ ” nu bij de Spons van Menger? Zeer eenvoudig, de figuur laat ons kennismaken met het begrip oneindig op een wel heel speciale manier. De Spons van Menger illustreert als geen ander hoe de begrippen oneindig en eindig perfect naast elkaar kunnen leven. Door te starten met een zeer eenvoudige en eindige figuur (een kubus) kunnen we toch een nieuw object creëren dat tegelijk een oneindige oppervlakte, maar geen volume heeft.