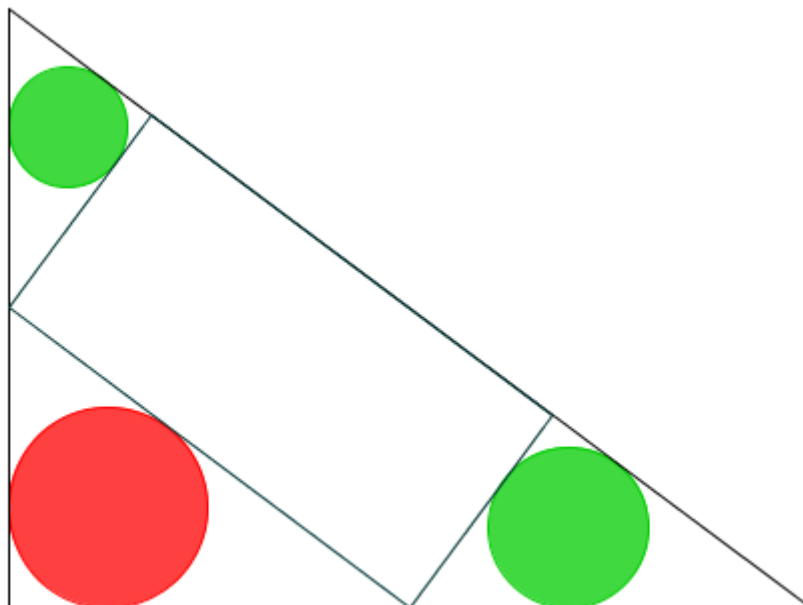


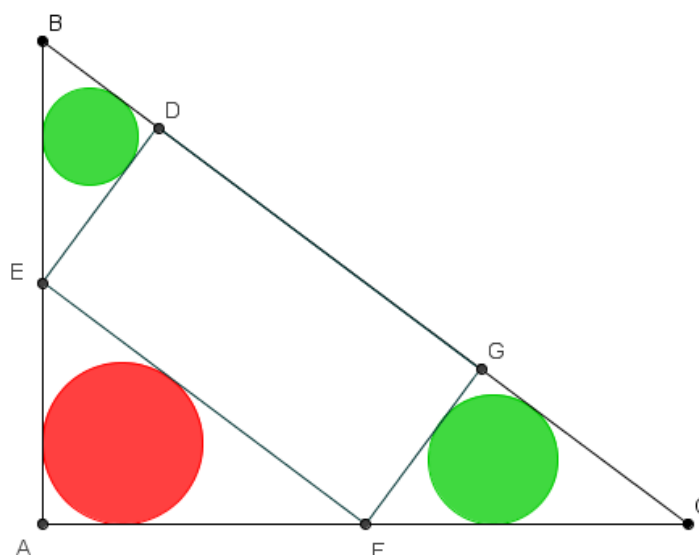
SANGAKU MET PYTHAGORESE CIRKELS



In een rechthoekige driehoek construeert men op de schuine zijde de rechthoek met de grootst mogelijke oppervlakte.
In de drie hoeken van de driehoek ontstaat zo een rechthoekig driehoekje.
De oppervlakte van de ingeschreven cirkel van het grootste driehoekje is dan gelijk aan de som van de oppervlakten van de ingeschreven cirkels van de twee andere driehoekjes.

Opmerking. De drie ingeschreven cirkels noemen we daarom *Pythagorese cirkels*.

BEWIJS



1. $\triangle AEF$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$

Als a , b en c de lengten zijn van de zijden van $\triangle ABC$, dan noemen we ka , kb en kc de lengten van de zijden van $\triangle AEF$.

$\triangle DBE$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$. Hieruit volgt dan dat

$$|DE| = \frac{(1-k)bc}{a}.$$

De rechthoek DEFG heeft dan als oppervlakte $\frac{ka(1-k)bc}{a^2}$ en die is maximaal als $k(1-k)$ maximaal is. Dat is voor $k = \frac{1}{2}$.

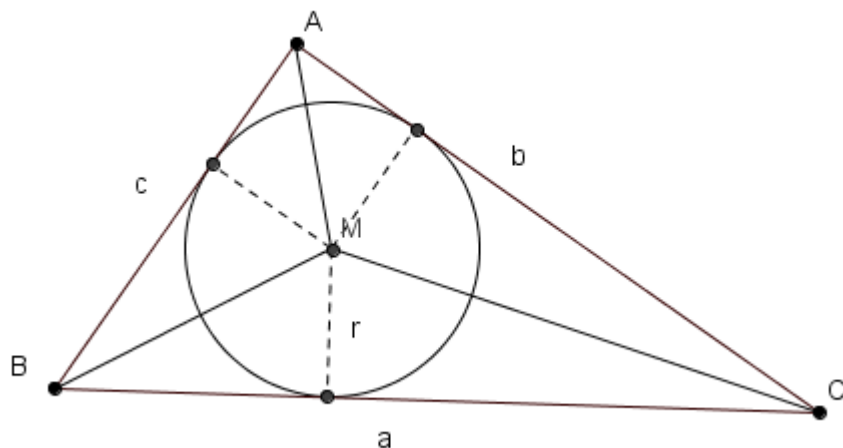
Dan is $|DE| = \frac{bc}{2a}$.

2. $\triangle DBE$ en $\triangle GFC$ zijn gelijkvormig met $\triangle ABC$
Hieruit volgt dat

$$|BD| = \frac{c^2}{2a} \quad \text{en} \quad |CG| = \frac{b^2}{2a}.$$

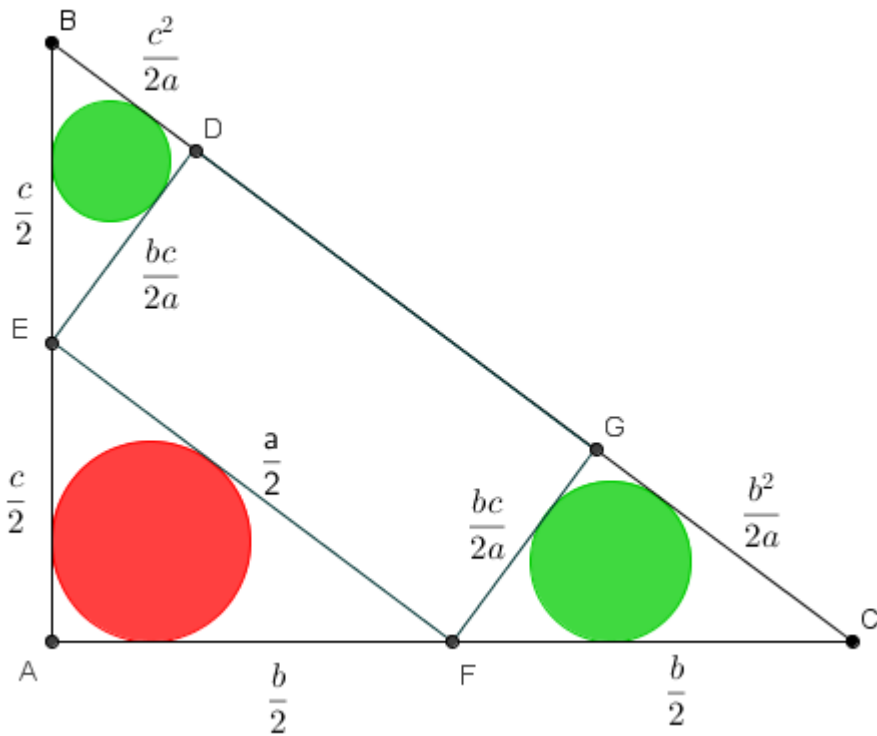
3. De straal r van de ingeschreven cirkel van een rechthoekige driehoek met zijden a , b en c (a is de schuine zijde) kan men berekenen via de gekende formule

$$r = \frac{bc}{a+b+c}. (*)$$



Die formule volgt direct uit het feit dat de oppervlakte van een rechthoekige $\triangle ABC$ gelijk is aan $\frac{bc}{2}$ en eveneens aan de som van de oppervlakten van $\triangle MBC$, $\triangle MCA$ en $\triangle MAB$.

Via de formule (*) en via de gegevens op de onderstaande figuur kunnen we de straal berekenen van de ingeschreven cirkels van $\triangle AEF$, $\triangle DBE$ en $\triangle GFC$:



$$r_{\triangle AEF} = \frac{bc}{2(a+b+c)},$$

$$r_{\triangle DBE} = \frac{bc^2}{2a(a+b+c)},$$

$$r_{\triangle GFC} = \frac{b^2c}{2a(a+b+c)}.$$

4. Omdat $a^2 = b^2 + c^2$ (Pythagoras) is dan

$$\pi(r_{\triangle AEF})^2 = \pi(r_{\triangle DBE})^2 + \pi(r_{\triangle GFC})^2.$$