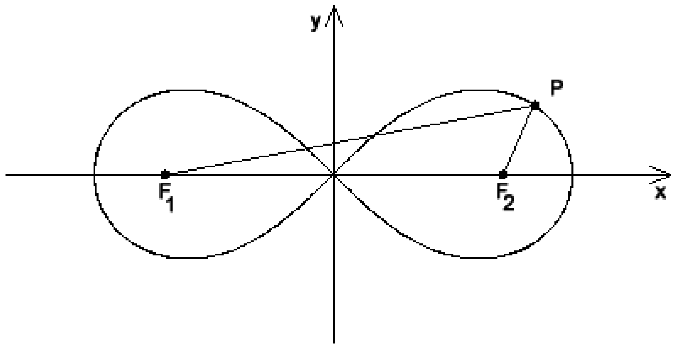

LEMNISCAAT VAN BERNOUILLI

Met $F_1(-a,0)$ en $F_2(a, 0)$ geldt

$$|PF_1| \, . \, |PF_2| = a^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(x^2+y^2+a^2)+2ax} \cdot \sqrt{(x^2+y^2+a^2)-2ax} = a^2$$
$$\Updownarrow$$
$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$
$$\Updownarrow$$
$$(x^2+y^2)^2 + 2a^2(x^2+y^2) - 4a^2x^2 = a^4$$
$$\Updownarrow$$
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Om de vergelijking om te zetten in poolcoördinaten: stel $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Rekening houdende met de formule $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ wordt dit

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}\,.$$

De oppervlakte A van één lus is dan

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{O}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= 2a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= a^2\,.$$

Met $F_1(-\sqrt{\pi}, 0)$ en $F_2(\sqrt{\pi}, 0)$ is $A = \pi$.