DE ZEEF VAN ERDÖS

Naar analogie met de zeef van Eratosthenes, waarbij via een eenvoudig procédé uit de rij van de natuurlijke getallen alle niet-priemgetallen worden geschrapt, bedachten de wiskundigen Paul Erdős (Hongarije) en Eri Jabotinsky (Israël) een constructie waarbij de volgende merkwaardige rij ontstaat (zie ook https://oeis.org/A002491):

1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 30, 34, 42, 48, 58, 60, 78, 82, 102, 108, 118, 132, 150, 154, 174, 192, 210, 214, 240, 258, 274, 282, 322, 330, 360, 372, 402, 418, 442, 454, 498, 510, 540, 570, 612, 622, 648, 672, 718, 732, 780, 802, 840, 870, 918 …

Hoe bekom je deze rij?

- Start met de rij van de natuurlijke getallen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 , 13, 14, 15 . . .
- Begin met de waarde k = 2 en schrap elke k-de (= tweede) term uit de rij, te beginnen bij de term met volgnummer 2k − 1 = 3. Je schrapt dus 3, 5, 7, 9 … en houdt zo de volgende rij over: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 …
- Herhaal deze stap met k = 3. Schrap dus elke k-de (= derde) term uit de resterende rij, te beginnen bij de term met volgnummer 2k – 1 = 5. Je schrapt dan 8, 14, 20, 26 … en houdt de volgende rij over: 1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 24 …
- Herhaal deze stap met k = 4, 5, 6 … enzovoort. Je houdt dan uiteindelijk de bovenstaande rij over.

De termen uit deze rij kan men nog op een andere merkwaardige manier bekomen. Als je bijvoorbeeld de 10^{de} term wilt vinden, moet je een rij opbouwen op de volgende manier.

Start met $t_1 = 10$.
Dan is t_2 het eerstvolgende veelvoud van 9 dat groter is dan 10, dus is $t_2 = 18$.
De term t_3 is dan het eerstvolgende veelvoud van 8 dat groter is dan 18, dus is $t_3 = 24$.
De term t_4 is het eerstvolgende veelvoud van 7 dat groter is dan 24, dus is $t_4 = 28$.
Zo bouw je de volgende rij op :

10, 18, 24, 28, 30, 30, 32, 33, 34, 34

waarbij de eindterm gelijk is aan $t_{10} = 34$. Dit is precies de 10^{de} term uit de bovenstaande rij.

Voor de 11^{de} term bouw je op dezelfde manier een rij getallen op. Vertrekkend vanaf 11 zoek je het eerstvolgende 10-voud (= 20) op , daarna het eerstvolgende 9-voud (= 27), dan het eerstvolgende 8-voud (= 32) enzovoort. Je bekomt de volgende rij:

11, 20, 27, 32, 35, 36, 40, 40, 42, 42, 42

zodat 42 de 11^{de} term wordt in de bovenstaande rij.

We kunnen dus een discrete functie f definiëren waarbij voor alle natuurlijke getallen n ($n > 0$) geldt dat f(n) = de n-de term uit de bovenstaande rij. Zo is f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, … , f(10) = 34, f(11) = 42 …

Dan geldt de volgende merkwaardige eigenschap (bron: Mathematical Constants, Steven R. Finch, Cambridge University Press, 2003, p. 25)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{f(n)} = \pi.}$$

Met behulp van het onderstaande programma voor een grafische rekenmachine (TI 83/84) kan je voor een gekozen waarde G de overeenkomstige waarde f(G) berekenen. De rij getallen waarvan G de beginterm is en f(G) de eindterm wordt opgeslagen in de lijst L_1. Het programma berekent ook de waarde $\frac{G^2}{f(G)}$.

```
PROGRAM:PI
:ClrHome
:ClrList L1
:Prompt G
:G→F:G→E
:G→L1(1)
:For(N,1,E–1)
:F–1→F
:While (int(G/F)≠G/F)
:G+1→G
:End
:G→L1(N+1)
:End
:Disp "F(G)= "
:Output(2,6,G)
:Disp "G²/F(G)= "
Output(3,9,E²/G)
```

Voorbeeld. Bij de startwaarde 10 is f(10) = 34 en is 10²/34 = 2,94…een benadering voor π.