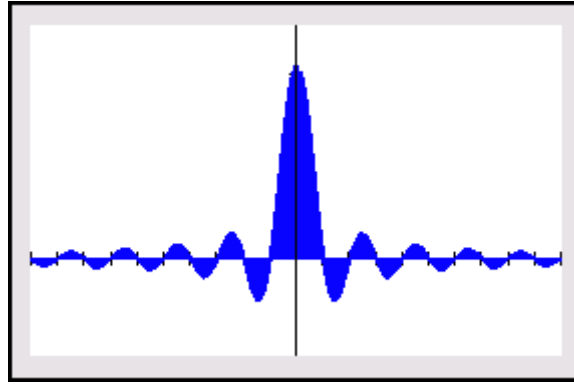




$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

BEWIJS.

Omdat het hier om een even functie gaat, volstaat het aan te tonen dat

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

We maken twee berekeningen vooraf.

1. De Laplacegetransformeerde van de sinusfunctie:

$$L\{\sin t\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{1+s^2}.$$

Bewijs. Door twee maal na elkaar partiële integratie toe te passen, blijkt dat

$$\int e^{-st} \sin t dt = -e^{-st} \cos t - s \left(e^{-st} \sin t + s \int e^{-st} \sin t dt \right),$$

zodat

$$\int e^{-st} \sin t dt = \frac{-e^{-st} \cos t - s e^{-st} \sin t}{1+s^2} + c.$$

Aangezien de sinusfunctie en de cosinusfunctie begrensde functies zijn en omdat

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$$

Is

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{1+s^2}. \quad (1)$$

2. Een oneigenlijke integraal:
$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, dy = \frac{\sin x}{x}. \quad (2)$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, dy &= -\frac{\sin x}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xy} d(-xy) \\ &= -\frac{\sin x}{x} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-xy} - 1 \right) \\ &= \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

We maken tenslotte gebruik van de eigenschap dat een dubbele integraal op twee manieren kan berekend worden:

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx.$$

Wegens (1) is het linkerlid gelijk aan

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

en wegens (2) is het rechterlid gelijk aan

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dit vervolledigt meteen het bewijs.