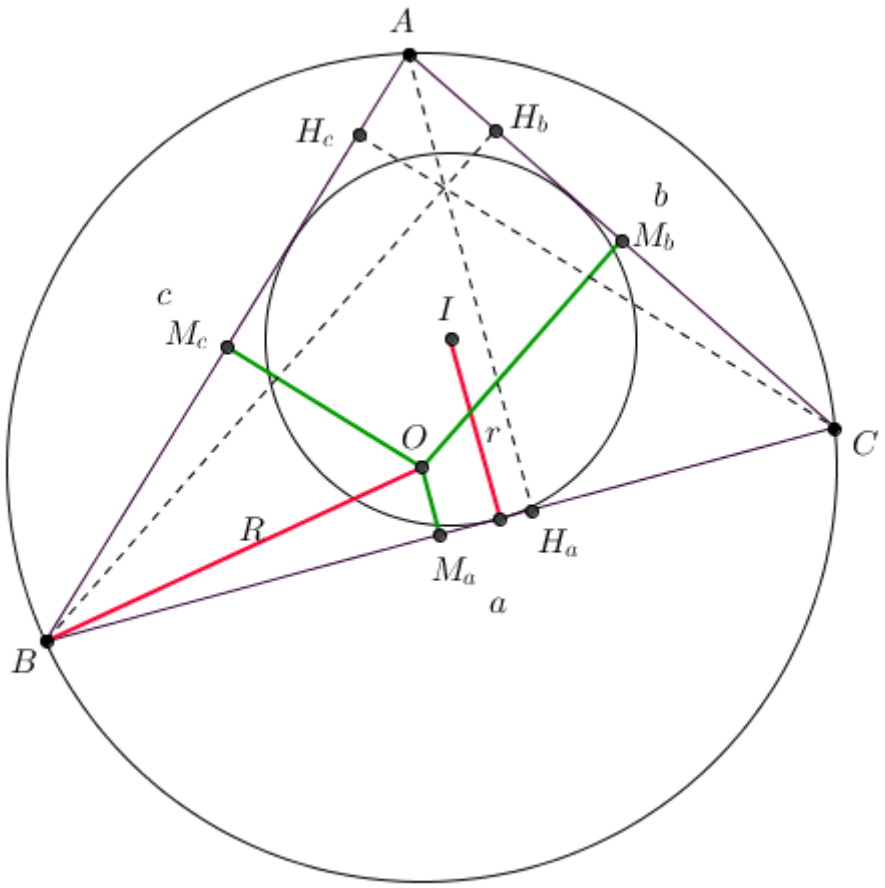
STELLING VAN CARNOT



De som van de afstanden van het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek tot de drie zijden is gelijk aan de som van de stralen van de in- en de omgeschreven cirkel van de driehoek.

We gebruiken de volgende notaties (zie figuur):
Hoekpunten van de driehoek: A, B, C.
Lengte van de zijden van de driehoek: a, b, c.
Middelpunt van de omgeschreven cirkel van Δ ABC: O.
Straal van de omgeschreven cirkel: R.
Middelpunt van de ingeschreven cirkel van Δ ABC: I.
Straal van de ingeschreven cirkel: r.
Middens van de zijden: M_a, M_b, M_c.
Voetpunten van de hoogtelijnen: H_a, H_b, H_c.

Te bewijzen: $|OM_a| + |OM_b| + |OM_c| = r + R$.

Luc Gheysens – www.gnomon.bloggen.be

BEWIJS.

Door O en I te verbinden met de hoekpunten A, B en C deelt men Δ ABC op in drie driehoeken, zodat

$$oppervlakte\ \Delta\ ABC = \frac{a|OMa|}{2} + \frac{b|OMb|}{2} + \frac{c|OMc|}{2} \quad (1)$$

en

$$oppervlakte\ \Delta\ ABC = \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{rc}{2}. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat $r(a + b + c) = a|OM_a| + b|OM_b| + c|OM_c|$. (3)

We merken op dat $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$ (omtrekshoek en middelpuntshoek op dezelfde cirkelboog) zodat $M_a\hat{O}C = B\hat{A}C$. Hieruit volgt dan dat Δ ABH_b en Δ ACH_c en Δ COM_a gelijkvormige driehoeken zijn, zodat

$$\frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b} = \frac{|OM_a|}{R}.$$

Hieruit volgt dan weer dat

$$|OM_a|(b + c) = R(|AH_b| + |AH_c|)$$

en analoog is $|OM_b|(a + c) = R(|BH_a| + |BH_c|)$ en $|OM_c|(a + b) = R(|CH_a| + |CH_b|)$.

Door deze laatste drie uitdrukkingen lid aan lid bij elkaar op te tellen, bekomen we dat

$$|OM_a|(b + c) + |OM_b|(a + c) + |OM_a|(b + c) = R(a + b + c). \quad (4)$$

Uit (3) en (4) volgt tenslotte via optelling en na het wegdelen van de term a + b + c in beide leden dat

$$|OM_a| + |OM_b| + |OM_c| = r + R.$$