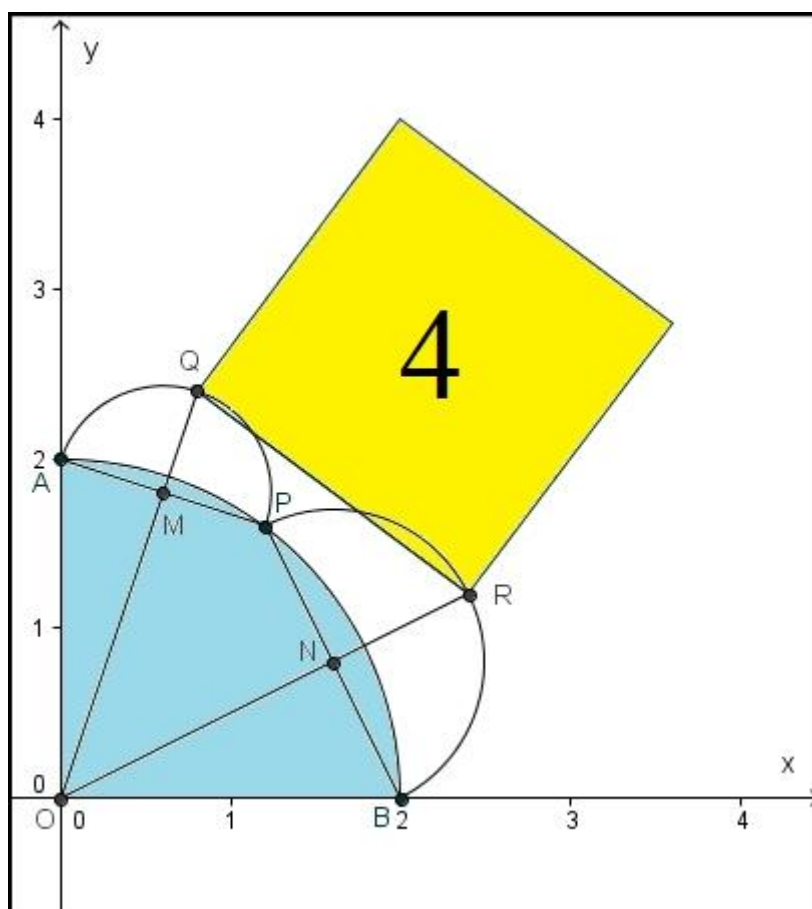


MET DE VIER VAN VIERKANT - opgelost



Beschouw de kwartcirkel met $O(0,0)$ als middelpunt en met $A(0,2)$ en $B(2,0)$ als eindpunten. P is een willekeurig punt op deze boog. M is het midden van $[A,P]$ en N het midden van $[BP]$. Q is het midden van de halve cirkel met M als middelpunt en met A en P als eindpunten. R is het midden van de halve cirkel met N als middelpunt en met B en P als eindpunten.

Te bewijzen: het vierkant met zijde $[QR]$ heeft als oppervlakte 4 (onafhankelijk van de keuze van het punt P).

BEWIJS (met behulp van complexe getallen).

Stel $P: 2\cos \alpha + 2i \sin \alpha$, $A: 0 + 2i$ en $B: 2 + 0i$.

Dan is $M: \cos \alpha + i(1 + \sin \alpha)$ en $N: \cos \alpha + 1 + i \sin \alpha$.

Een rotatie over een hoek van 90° komt overeen met de vermenigvuldiging van een complex getal met de imaginaire eenheid i en een rotatie over -90° met de vermenigvuldiging met $-i$.

Dan is $Q: M + i(P - M) = \cos \alpha - \sin \alpha + 1 + i(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$

en $R: N - i(P - N) = \cos \alpha + \sin \alpha + 1 + i(1 + \sin \alpha - \cos \alpha)$,

zodat $R - Q: 2 \sin \alpha - 2i \cos \alpha$ en bijgevolg is $|QR|^2 = (2 \sin \alpha)^2 + (-2 \cos \alpha)^2 = 4$.