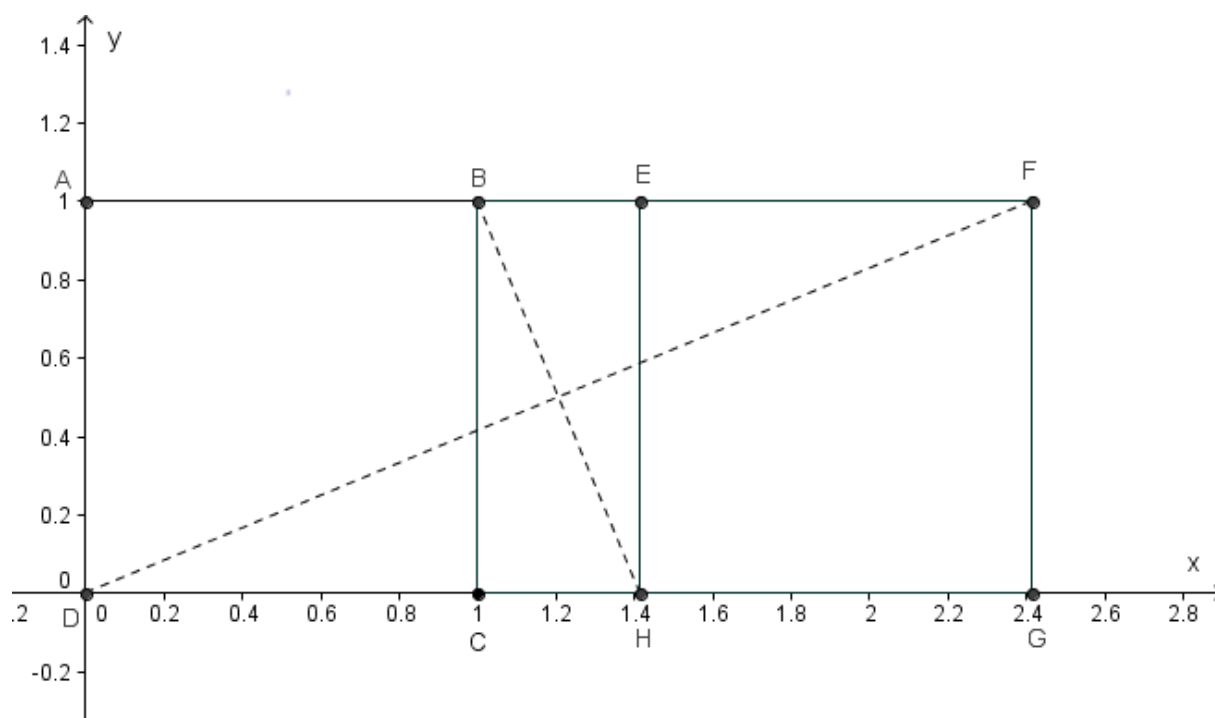


DE SANDWICH-EIGENSCHAP – opgelost



Een rechthoek BEHC zit ‘gesandwicht’ tussen twee even grote vierkanten ABCD en EFGH en is gelijkvormig met de grote rechthoek AFGD.

1. Toon aan dat de verhouding van de lengte tot de breedte van de rechthoeken BEHC en AFGD dan gelijk is aan $\sqrt{2} + 1$.
2. Toon aan dat de diagonaal [BH] van de kleine rechthoek loodrecht staat op de diagonaal [DF] van de grote rechthoek.
3. Toon aan dat $\widehat{GDF} = 22^\circ 30'$.

OPLOSSING

We nemen aan dat de zijden van de vierkanten ABCD EFGH lengte 1 hebben en kiezen het assenstelsel zoals op de bovenstaande figuur.

1. Stel $|BE| = x$, dan zijn de rechthoeken BEHC en DAFG gelijkvormig als en slechts als

$$\frac{1}{x} = \frac{2+x}{1}, \text{ d. w. z. } x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Dan is

$$x = \sqrt{2} - 1, \quad \text{zodat} \quad \frac{|EH|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{1}{x} = \sqrt{2} + 1.$$

2. Uit deze berekening vinden we de coördinaten van H en F:

$$H(\sqrt{2}, 0) \text{ en } F(\sqrt{2} + 1, 1)$$

zodat

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{DF} = (\sqrt{2} - 1, -1) \cdot (\sqrt{2} + 1, 1) = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

3. We tonen via de formule

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

aan dat $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$.

Stel $\tan 22^\circ 30' = x$, dan is rekening houdend met $\tan 45^\circ = 1$:

$$1 = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \text{d.w.z. } x^2 + 2x - 1 = 0,$$

waaruit volgt dat $x = \tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$.

In de rechthoekige driehoek GDF is

$$\tan \widehat{GDF} = \frac{|FG|}{|DG|} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

waaruit we concluderen dat $\widehat{GDF} = 22^\circ 30'$.