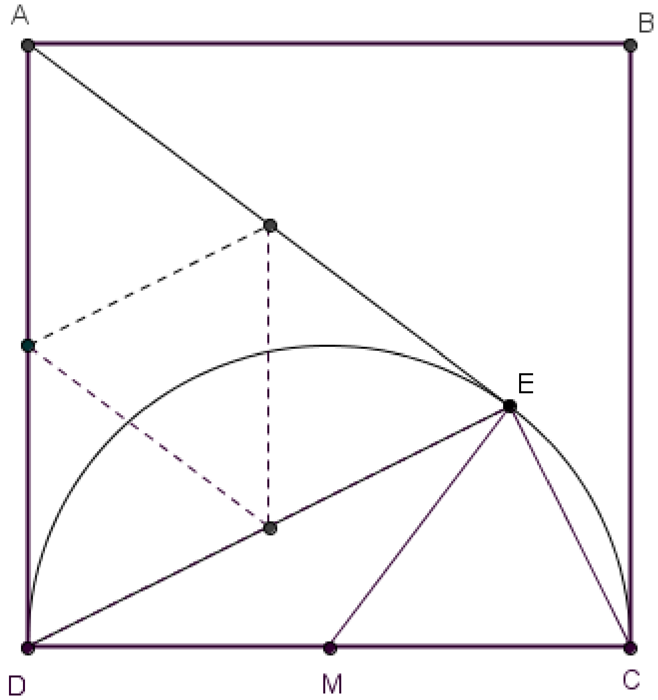
VIER KEER ZO GROOT – opgelost



In een vierkant ABCD tekent men een halve cirkel met middellijn [CD] en middelpunt M.
AE is een raaklijn uit A aan deze halve cirkel en E is het raakpunt (zie figuur)

Dan is de oppervlakte van Δ ADE vier maal de oppervlakte van Δ MEC.

Bewijs dit!

OPLOSSING 1. Synthetisch.

$$A\hat{E}D + D\hat{E}M = 90° \text{ (AE is een raaklijn) } en \;\; D\hat{E}M + M\hat{E}C = 90° \text{ ([CD]is een middellijn)}$$
$$\Downarrow$$
$$A\hat{E}D = M\hat{E}C. \quad (*)$$

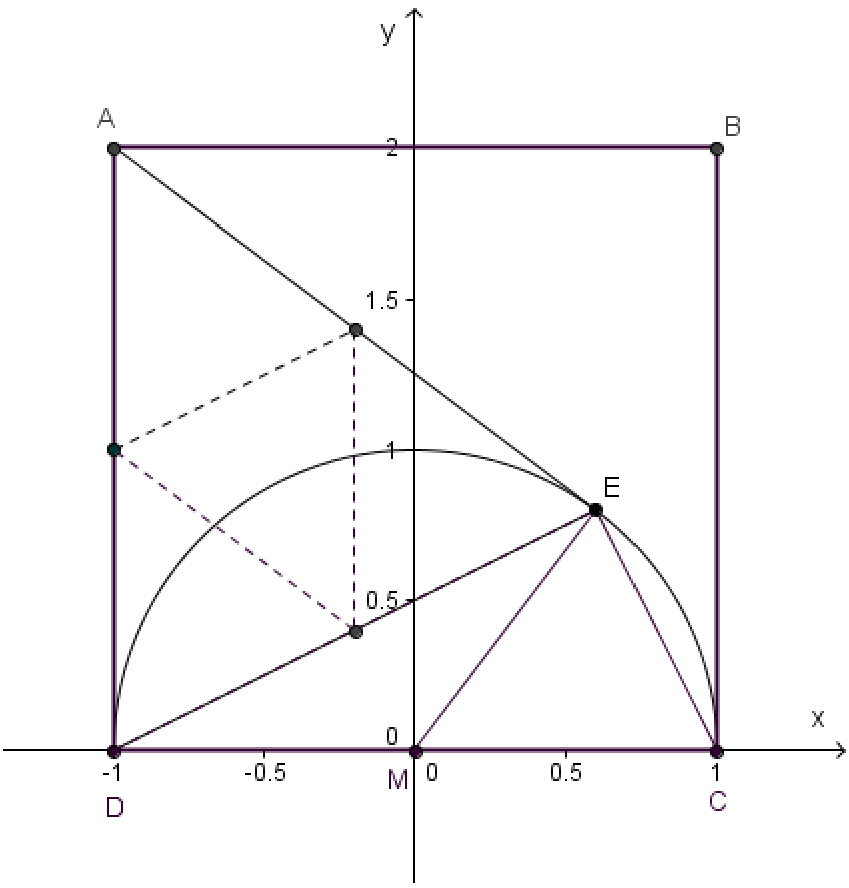
Δ ADE is een gelijkbenige driehoek (|AE| = |ED| want AD en AE zijn raaklijnen) en ook Δ MEC is een gelijkbenige driehoek (|ME| = |MC|) zodat wegens (*) deze twee driehoeken gelijkvormig zijn.

Dan is

$$\frac{|AE|}{|ME|} = \frac{|AD|}{|MC|} = 2\,.$$

De zijden van Δ ADE zijn bijgevolg dubbel zo lang als de zijden van Δ MEC en bijgevolg is de oppervlakte van Δ ADE vier maal de oppervlakte van Δ MEC.

OPLOSSING 2. Analytisch.



Kies het assenstelsel zoals op de bovenstaande figuur. Dan is A(-1,2).

Met E(a,b) geldt dat $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{ME} \Leftrightarrow (a+1, b-2) \cdot (a, b) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + a + b^2 - 2b = 0.$ (1)

Omdat E(a,b) op de cirkel met middelpunt M(0,0) en straal r = 1 ligt is bovendien

$a^2 + b^2 = 1.$ (2)

Uit (1) volgt dan dat $a = 2b - 1$ en wegens (2) is $5b^2 - 4b = 0$.

Hieruit leiden we de coördinaten af dat $E\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, zodat

$$opp.\Delta\, MEC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \quad en \quad opp.\Delta\, ADE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{5} + 1\right) = \frac{8}{5}.$$