

Dossier 2

LOGICA

fundament voor wiskundig redeneren

Dr. Luc Gheysens

Inleiding: logische puzzels

Wiskundigen houden meestal van logische puzzels. Dit soort puzzels vormt niet alleen een uitdaging, maar bovenal bieden logische raadsels de kans om aan anderen te laten zien dat of je al dan niet logisch kunt redeneren. Hieronder vind je vijf leuke ‘starters’. De eerste vier problemen haalden we uit [1].

Opgave 1

Alien, Ben, Celien en Daan hebben een cadeau voor hun vader gekocht. Een van de vier kinderen heeft het cadeau verstopt. Toen hun moeder vroeg wie dat had gedaan, antwoordden ze als volgt:

Alien: “Ik was het niet.”

Ben: “Ik was het niet.”

Celien: “Daan heeft het gedaan.”

Daan: “Ben heeft het gedaan.”

- Is het mogelijk dat ze alle vier de waarheid spreken?
- Is het mogelijk dat juist één kind de waarheid spreekt? Zo ja, wie heeft het dan gedaan?
- Is het mogelijk dat juist één kind liegt? Zo ja, wie heeft het dan gedaan?

Opgave 2

John en Leny nemen de getallen 3 en 11 in gedachten en bedenken:

* de som ($3 + 11$) is even

* het product (3×11) is oneven

John zegt: “Als de som van twee gehele getallen even is, is hun product oneven.”

Leny zegt: “Als het product van twee gehele getallen oneven is, is hun som even.”

- Heeft John gelijk?
- Heeft Leny gelijk?

Opgave 3

Er zijn 2 rode en 3 zwarte petjes. Drie intelligente studenten weten dit en zitten in een rij.

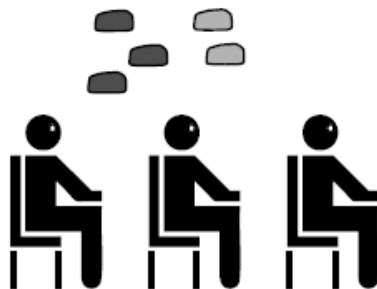
Iedere student krijgt een petje op. Ze kunnen alleen de petjes zien van degenen die voor ze zitten.

Aan de achterste student wordt gevraagd: “Weet jij welke kleur van pet je op hebt?”

Hij kijkt naar de twee petjes voor zich, denkt even na en zegt dan: “Nee.”

Vervolgens wordt dit aan de middelste gevraagd. Die ziet maar één petje voor zich, denkt na en antwoordt ook ontkennend.

De voorste is even stil en zegt: “Dan weet ik de kleur van mijn petje!” Welke kleur is dat?



Opgave 4

In de 18e eeuw vond Euler een bijzondere formule voor veelvlakken:

$$\text{het aantal zijvlakken} - \text{het aantal ribben} + \text{het aantal hoekpunten} = 2$$

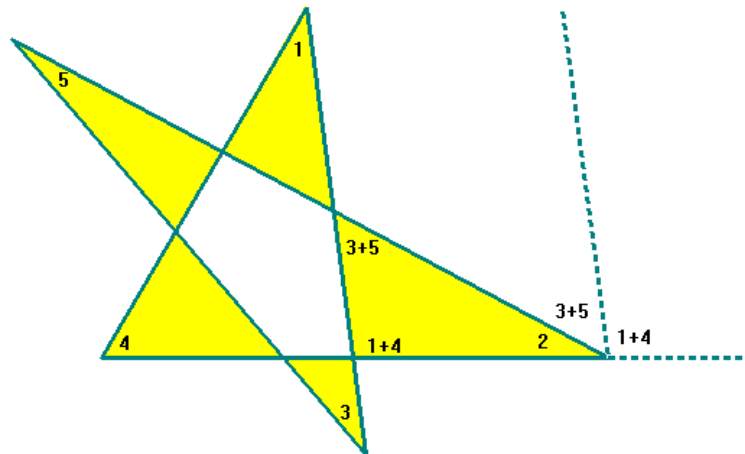
Euler was zo verrast door de eenvoud van deze formule dat hij het onbegrijpelijk vond dat nog niemand eerder dit gevonden had.

- Controleer de formule voor de kubus en de piramide.
- Onderzoek voor een aantal andere ruimtelijke figuren of je de formule van Euler kunt gebruiken en, zo ja, of hij wel of niet waar is.
- Kun je uit je bevindingen tot nu toe concluderen dat de formule van Euler waar moet zijn voor *alle* ruimtelijke figuren?

Opgave 5

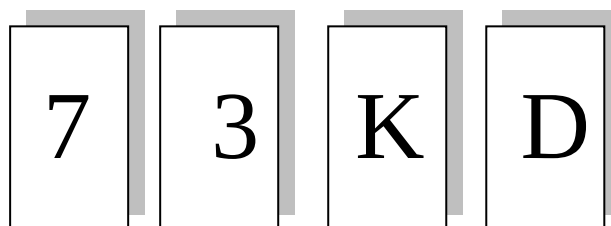
In een meetkundeboek lezen we: “De som van de hoeken van een vierhoek is gelijk aan 360° ”.

- Kan je dit bewijzen voor een convexe vierhoek, d. i. een vierhoek die volledig aan één kant van elke zijlijn ligt?
- Is de uitspraak ook geldig voor een niet-convexe vierhoek?
- Wat weet je over de som van de hoeken van een convexe vijfhoek?
- En hoe zit dit bij een niet-convexe vijfhoek? Bestudeer hiervoor de onderstaande figuur.



Opgave 6 [2]

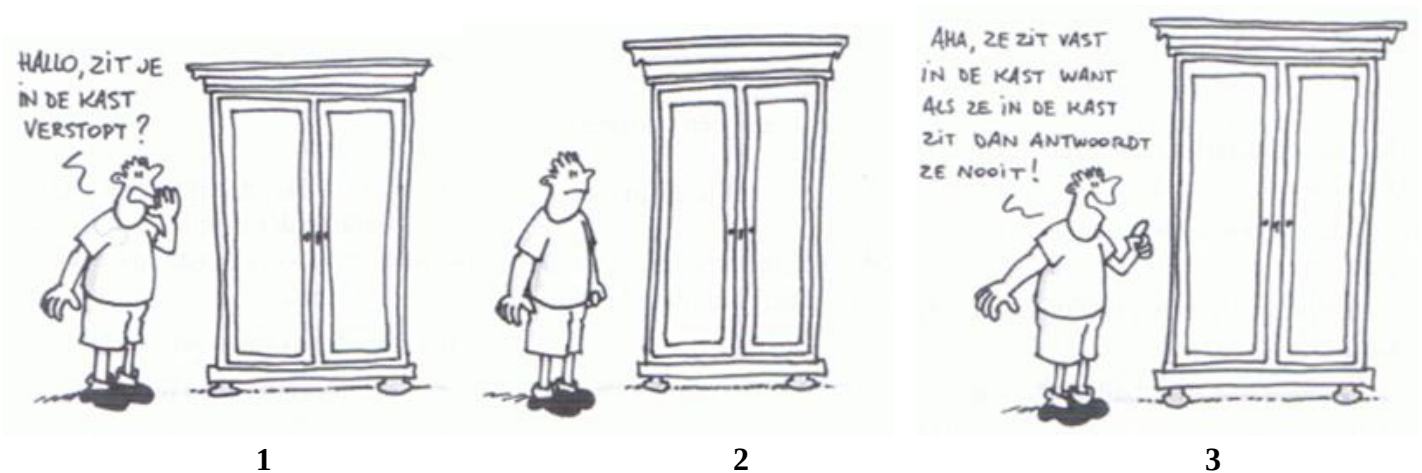
In de jaren '60 bedacht de Engelse psycholoog Peter Cathcart Wason de zogenaamde Wason-test. Hij legt hierbij vier kaartjes op tafel met op de ene kant een letter en op de andere kant een cijfer. Dit zijn de kaartjes:



Hierbij stelde Wason twee vragen:

- (a) Welke kaart(en) moet je omdraaien om te controleren of de volgende uitspraak (altijd) waar is? “Als er aan de ene kant een D staat, staat er aan de andere kant een 3”.
- (b) Welke kaart(en) moet je omdraaien om te controleren of de volgende uitspraak (altijd) waar is? “Aan de ene kant staat er een D als en slechts als er aan de andere kant een 3 staat.”

Opgave 7



Bekijk het bovenstaande stripverhaal.

Blijkbaar maakt de jongen hier de volgende redenering: “Als ze in de kast zit, dan zal ze niet antwoorden en dus mag ik hier ook uit besluiten dan ze in de kast zit, want ze antwoordt niet!”. Is dit een correcte redenering?

En wat denk je van het volgende verhaaltje. Vader zegt: “Als het zondag goed weer is, dan gaan we fietsen aan zee.” Het dochttertje besluit hieruit: “Als het zondag geen goed weer is, dan gaan we niet fietsen aan zee.” Is dit *logisch gezien* wel correct?

Opgave 8 (JWO – 2007 – eerste ronde)

Een ver land is verdeeld in twee gebieden: het oosten en het westen. De mensen uit het westen spreken steeds de waarheid. De mensen uit het oosten liegen altijd. De koning vroeg aan zijn hofmaarschalk waar de premier woont. De hofmaarschalk wist het antwoord niet en mailde naar de premier. Nadat hij antwoord kreeg van de premier, zei de hofmaarschalk tegen de koning: “de premier woont in het oosten”. Wat kan de koning hieruit met zekerheid besluiten?

- (A) De premier woont in het oosten.
- (B) De premier woont in het westen.
- (C) De hofmaarschalk woont in het oosten.
- (D) De hofmaarschalk woont in het westen.

Opgave 9a

Toon aan dat er geen breuk x bestaat zodat $x^2 = 2$.

Hiermee toon je dan in feite aan dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is!

Bewijs uit het ongerijmde.

Stel dat er wel een breuk $\frac{m}{n}$ bestaat (waarbij m en n natuurlijke getallen zijn en $n \neq 0$) zodat

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. We mogen dan veronderstellen dat deze breuk onvereenvoudigbaar is, m.a.w. dat m en n geen gemeenschappelijke deler meer hebben behalve 1 (*).

Maar dan is $m^2 = 2n^2$, wat betekent dat m even is. Immers het kwadraat van een oneven getal is zelf oneven. Stel $m = 2p$ voor een bepaald natuurlijk getal p . Dan is $m^2 = 4p^2 = 2n^2$, waaruit volgt dat $n^2 = 2p^2$.

Hieruit volgt dat n zelf even is en dus $n = 2q$ voor een bepaald natuurlijk getal q . Maar dan hebben p en q het getal 2 als gemeenschappelijke deler, wat een contradictie is met de veronderstelling (*)

Opgave 9b

Toon aan dat er twee irrationale getallen r en s bestaan zodat r^s rationaal is.

Bewijs.

(1) We kiezen $r = s = \sqrt{2}$. Volgens opgave 9a zijn dit allebei irrationale getallen. Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is dan hebben we meteen de stelling bewezen.

(2) Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ niet rationaal is, dat is dit getal uiteraard irrationaal.

Dan kiezen we $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $s = \sqrt{2}$.

Dan is $r^s = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ en hiermee is de stelling bewezen.

Dit is een mooi voorbeeld van een existentiebewijs (er wordt bewezen dat er twee dergelijke getallen r en s bestaan, zonder dat je weet welke die getallen zijn). We weten ondertussen dat geval (2) correct (stelling van Gelfond-Schneider, 1934).

Opgave 10

Hoeveel is de som van alle natuurlijke getallen van 1 tot en met 100 die geen 3-voud, geen 4-voud en geen 6-voud zijn?

PROPOSITIELOGICA

Een *propositie* of *logische uitspraak*, verder weergegeven door een letter $p, q, r \dots$ is een uitspraak die in een vastgelegde context waar of vals is. We zeggen dat de propositie p *waarheidswaarde* 1 heeft als p waar is en waarheidswaarde 0 als p vals is. Om de waarheidswaarde op een visueel overzichtelijke manier voor te stellen gebruikt men zogenaamde waarheidstabellen.

Voorbeelden.

p = “2 is oneven” is een valse propositie

q = “ga onmiddellijk zitten” is geen propositie

r = “het regent” is een propositie, die ofwel waar is ofwel vals al naargelang het tijdstip en de plaats

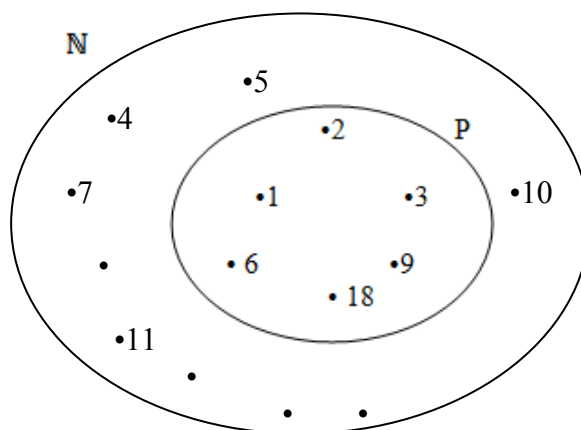
s = “elk vierkant is een rechthoek” is een ware propositie.

In de wiskunde kan men aan heel wat proposities een waarheidsdomein associëren. Dit is de verzameling waarin alle elementen zitten waarvoor de propositie waar is. Men moet daarbij de referentieverzameling kennen, dit is de verzameling van alle elementen waaruit men mag kiezen.

Voorbeelden.

p = “ x is een deler van 18”. Als de referentie $E = \mathbb{N}$ is, dan is het waarheidsdomein van de propositie p de verzameling $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Als de referentieverzameling $E = \mathbb{Z}$ is, dan is het waarheidsdomein $P = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

We kunnen dit weergeven met behulp van een Venndiagram (genoemd naar de Engelse wiskundige John Venn (1834 – 1923)):



q = “ x is een deler van 24” heeft bij de referentieverzameling $E = \mathbb{N}$ als waarheidsdomein $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

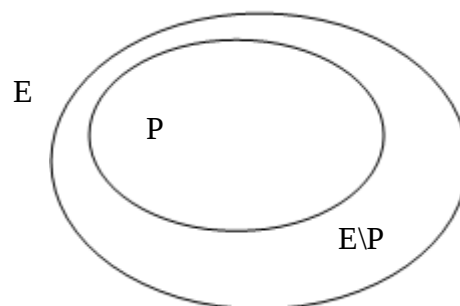
Op proposities kan men ‘bewerkingen’ uitvoeren:

uitspraak	in symbolen	naam
niet p	$\neg p$	negatie
p en q	$p \wedge q$	conjunctie
p of q	$p \vee q$	disjunctie

- Voor de **negatie** (ontkenning) van de propositie p wordt naast de notatie $\neg p$ ook soms $\sim p$ gebruikt. De negatie verandert de waarheidswaarde van een propositie, zoals blijkt uit de onderstaande waarheidstabel:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Als P het waarheidsdomein van de propositie p is, dan is $E \setminus P = P^C$ (het complement van P t.o.v. de referentieverzameling E) het waarheidsdomein van $\neg p$.



- Voor de **conjunctie** van de proposities p en q gebruikt men naast de notatie $p \wedge q$ ook soms p & q. De (samengestelde) propositie $p \wedge q$ is enkel waar als zowel p en q waar zijn. Dit blijkt uit de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van q, dan is de doorsnede $P \cap Q$ het waarheidsdomein van $p \wedge q$.

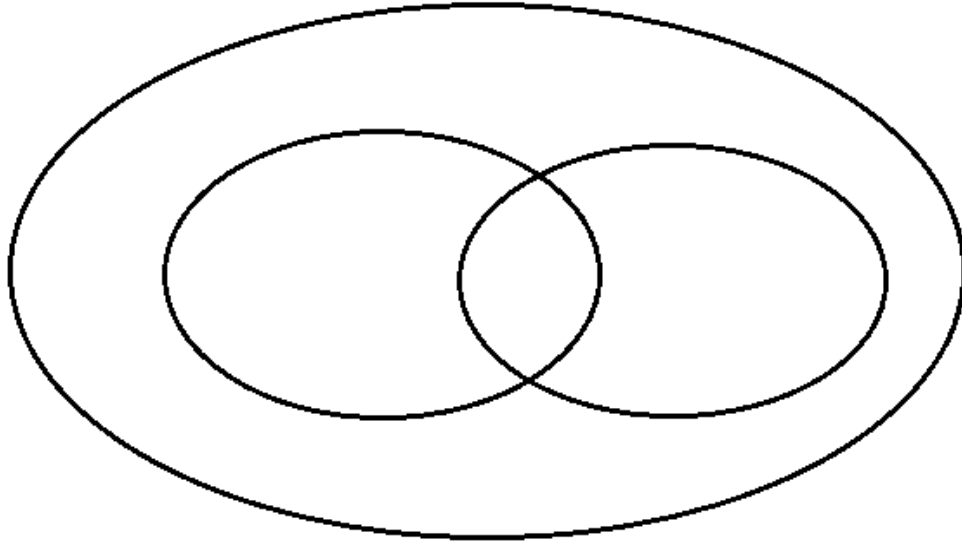
Voorbeeld.

p = “x is een deler van 18” ;

q = “x is een deler van 24”;

$p \wedge q =$ “x is een deler van 18 en van 24”.

➤ **Opgave 11.** Stel $P \cap Q$ voor op het onderstaande Venndiagram.



- Voor de **disjunctie** van de proposities p en q gebruikt men de notatie $p \vee q$. Met “p of q” bedoelt men hier de zogenaamde *inclusieve of*, m.a.w. $p \vee q$ is waar als ofwel p waar is, ofwel q ofwel allebei. Zo kan iemand korting krijgen in Kinopolis als hij een studentenkaart heeft of als medewerker is bij Kinopolis. Een medewerker die student is, geniet dan van dezelfde korting; In dit geval ziet de waarheidstabel er als volgt uit:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van q, dan is de unie $P \cup Q$ het waarheidsdomein van $p \vee q$.

.

Voorbeeld.

$p =$ “x is een deler van 18”

$q =$ “x is een deler van 24”

$p \wedge q =$ “x is een deler van 18 en van 24”.

➤ **Opgave 12.** Geef de verzameling $P \cap Q$ via opsomming:

$P \cap Q =$

Tussen proposities bestaan er ook relaties, zoals de implicatie (als ..., dan ...) en de dubbele implicatie of equivalentie (... als en alleen als ...).

uitspraak	in symbolen	naam
als p dan q	$p \Rightarrow q$	implicatie
p als en alleen als q	$p \Leftrightarrow q$	dubbele implicatie, equivalentie

- Een implicatie $p \Rightarrow q$ is de bewering dat als een propositie p waar is, dat dan ook de propositie q waar is. Men leest dit als “p impliceert q” of gewoonweg “als p, dan q” of nog “q volgt uit p”.

We stellen vast dat er een verschil is tussen beweringen van het type “als ...; dan ...” in de gewone omgangstaal en in de logica. We illustreren dit met een concreet voorbeeld.

Als de vader van Bruno zegt: “Als onze zoon met zijn eindexamen 80 % haalt, dan krijgt hij een brommer”, dan zal Bruno ongetwijfeld aanvoelen dat deze belofte enkel niet ingelost wordt in het geval dat hij 80 % haalt en toch geen brommer krijgt. Dit betekent dus ook dat de belofte waar is als Bruno geen 80 % haalt in juni en toch een brommer krijgt.

We plaatsen de mogelijke scenario's in het onderstaande schema:

scenario		de belofte is
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is waar Bruno haalt 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	onwaar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is waar Bruno krijgt een brommer	waar
p is onwaar Bruno haalt geen 80 % in juni	q is onwaar Bruno krijgt geen brommer	waar

p wordt wel eens het antecedens of de hypothese genoemd en q het consequens of de conclusie. De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

De volgende twee beweringen zijn bijgevolg (volgens de propositielogica) waar:

- “Als een hagedis een vogel is, dan is $1 + 1 = 2$ ”.

- “Als een merel een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$ ”.

Als P het waarheidsdomein is van de propositie p en Q het waarheidsdomein van de propositie q en $p \Rightarrow q$, dan zal P een deelverzameling zijn van Q : $P \subset Q$.

Voorbeeld.

p = “ x is een deler van 12”

q = “ x is een deler van 36”.

➤ **Opgave 13.** Ga na dat $P \subset Q$.

In de context van implicaties hanteert men vaak de termen “nodige voorwaarde” en “voldoende voorwaarde”. Als de implicatie $p \Rightarrow q$ waar is, dan zegt men dat p een voldoende voorwaarde is voor q , of nog: opdat q zou gelden is het voldoende dat p geldt. Een alternatieve manier om dit uit te drukken is zeggen dat q een nodige voorwaarde is voor p (q volgt noodzakelijkerwijze uit p) of nog: opdat p zou gelden is het nodig dat q geldt. Immers, als q niet geldt, dan kan p onmogelijk waar zijn.

Voorbeeld.

Beschouw de bewering “opdat een natuurlijk getal n een viervoud zou zijn, is het nodig dat n even is”. Hier is p = “ n is een viervoud” en q = “ n is even”. Dan geldt de implicatie $p \Rightarrow q$. Het is dus voldoende dat n een viervoud is opdat n zou even zijn. De nodige voorwaarde “ n is even” is echter geen voldoende voorwaarde (want 6 is even maar geen viervoud)!

In de spreektaal trekt men vaak de verkeerde conclusie dat uit $p \Rightarrow q$ volgt dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn. Als vader zegt: “Als het zondag mooi weer is, gaan we fietsen aan zee”, dan zal het dochtertje hieruit wellicht besluiten dat als het geen goed weer is, ze niet zullen gaan fietsen aan zee.

- De implicatie $q \Rightarrow p$ is de omkering van de implicatie $p \Rightarrow q$. Als beide implicaties gelden, dan zeggen we dat p en q equivalent zijn. De equivalentie wordt genoteerd met $p \Leftrightarrow q$.

Dus $p \Leftrightarrow q$ betekent $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is de volgende:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

In wiskundige bewijzen spreekt men $p \Leftrightarrow q$ vaak uit als “ p als en slechts als q ” of afgekort “ p asa q ”. In dit geval is p een nodige en voldoende voorwaarde voor q en is ook omgekeerd q een nodige en voldoende voorwaarde voor p .

Voorbeelden.

Een driehoek ABC is gelijkbenig asa driehoek ABC twee even grote hoeken heeft.

Een natuurlijk getal n is deelbaar door 6 asa n deelbaar is door 2 en door 3.

Twee rechten in een vlak snijden elkaar asa ze precies één punt gemeen hebben.

Om aan te tonen dat twee verzamelingen gelijk zijn, toont men aan dat ene een deelverzameling is van de andere en omgekeerd, m.a.w. $P = Q \Leftrightarrow P \subset Q \wedge Q \subset P$.

Opmerking. Wanneer men te maken heeft met meer ingewikkelde beweringen dan zal men bij voorkeur voor de duidelijkheid haakjes gebruiken. Zo bedoelen we met $\neg p \Rightarrow q \wedge r$ in feite $(\neg p) \Rightarrow (q \wedge r)$ en zorgen haakjes voor meer duidelijkheid.

Tautologieën

We stellen nu de waarheidstabel op van een aantal logische uitdrukkingen. De cijfertjes in de onderste rij van de tabel staan in het vetjes gedrukt en verwijzen naar de volgorde waarin men de cijfers 1 (voor waar) en 0 (voor onwaar) invult. Het eindresultaat staat in een rechthoekje (met onderaan het in vetjes afgedrukte cijfer 4).

Voorbeeld 1. De logische uitdrukking $(p \wedge q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$

p	q	$(p \wedge q)$			$\vee$	$(\neg p \Rightarrow q)$		
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	2	3	2	4	2	3	2

Een bewering samengesteld uit verschillende proposities is een **tautologie** of **logische stelling** als haar waarheidswaarde altijd 1 (waar) is onafhankelijk van de waarheidswaarde van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

Een **contradictie** of **tegenspraak** is een samengestelde bewering waarvan de waarheidswaarde altijd 0 (onwaar) is, voor alle mogelijke waarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

De bewering in voorbeeld 1 is dus geen tautologie en ook geen contradictie. In dit geval spreekt men van een **contingentie**.

Voorbeeld 2. De wet van de **contrapositie**: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

p	q	$(p \Rightarrow q)$			$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$		
1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1

1 1 2 3 2 4 2 3 2

Dit is een belangrijke tautologie die men vaak gebruikt bij wiskundige redeneringen en bewijzen. Zo kan een oneven getal nooit een viervoud zijn want als een getal een viervoud is, is het ook deelbaar door 2. Een driehoek ABC waarvan de drie hoeken een verschillende grootte hebben, kan niet gelijkbenig zijn, omdat elke gelijkbenige driehoek twee even grote hoeken heeft.

De wet van de contrapositie kan men ook ‘vertalen’ naar de verzamelingenleer:

$$P \subset Q \Leftrightarrow Q^C \subset P^C.$$

Voorbeeld 3. **De eerste wet van De Morgan** (Augustus De Morgan, een Britse wiskundige en logicus, 1806 – 1871).

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

de negatie van (p en q) is (niet p of niet q)

Als het bijvoorbeeld niet waar is dat Lieselot een fiets heeft en een bromfiets, dan betekent dit dat ze geen fiets heeft of geen bromfiets (of geen van beide).

p	q	$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$							
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	4	2	3	2	5	2	4	2

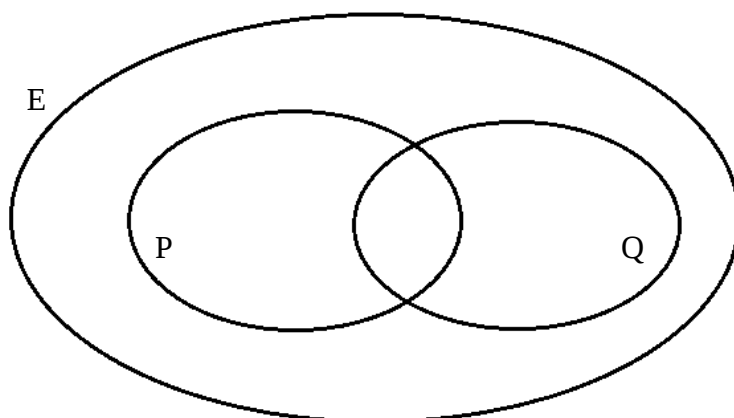
Men kan deze wet ook vertalen naar de verzamelingenleer:

$$(P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$$

het complement van de doorsnede is gelijk aan de unie van de complementen

Opgave 14

Toon deze laatste gelijkheid voor verzamelingen aan op het onderstaande Venndiagram.



Voorbeeld 4. De tweede wet van De Morgan

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

de negatie van (p of q) is (niet p en niet q)

Als het bijvoorbeeld niet waar is dat Lieselot een hond heeft of een kat, dan betekent dit dat ze geen hond heeft en geen kat.

p	q	$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$							
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	4	2	3	2	5	2	4	2

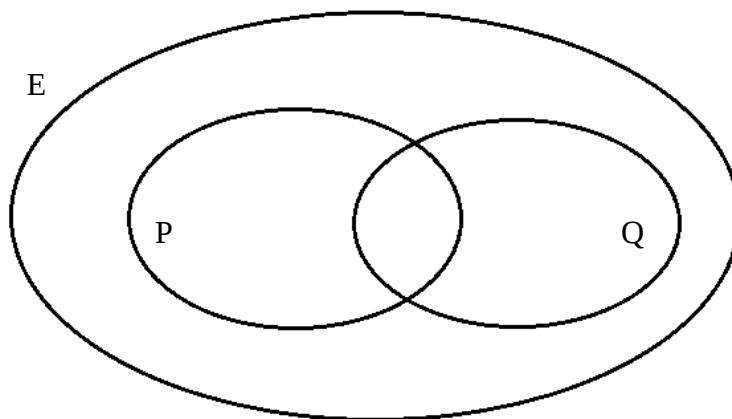
Men kan deze wet ook vertalen naar de verzamelingenleer:

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$$

het complement van de unie is gelijk aan de doorsnede van de complementen

Opgave 15

Toon deze laatste gelijkheid voor verzamelingen aan op het onderstaande Venndiagram.



Opgave 16

Hieronder staan een aantal logische wetten.

Toon telkens aan met behulp van een waarheidstabel dat het om een tautologie gaat ([3]).

1. De modus ponens: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
2. De dubbele negatie: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
3. De implicatie en de negatie van de implicatie: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
 $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
4. Syllogisme (transitiviteit van de implicatie): $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
Als 'typevoorbeeld van een syllogisme vindt men in de literatuur de volgende redenering:

Alle mensen zijn sterfelijk
Socrates is een mens
Socrates is sterfelijk.

In de 'ludieke logica' vindt men enkele leuke varianten hierop:

Ik kan in mijn jas
Mijn jas kan in mijn valies
Ik kan in mijn valies.

Alle zeldzame dingen zijn duur
Een paard dat 50 euro kost is zeldzaam
Een paard van 50 euro is duur.

5. Redenering uit het uitgerijmde: $q \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$
6. De wet van de uitgesloten derde: $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$
7. Commutativiteit van conjunctie en disjunctie: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
 $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
8. Associativiteit van conjunctie en disjunctie: $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
 $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
9. Distributiviteit van de conjunctie t.o.v. de disjunctie:

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

Distributiviteit van de disjunctie t.o.v. conjunctie:

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

10. Bewijs van equivalentie ('de pijl in twee richtingen' of nodig en voldoende voorwaarde):

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

Opgave 17

Toon de geldigheid van de wet van de gevalsonderscheiding aan:

$$((p \vee q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$$

Kan je dit illustreren met een voorbeeld?

Controleer jouw antwoord met behulp van de waarheidstabulator die je vindt op <http://www.opener2.ou.nl:8080/opener/spinoza/lia/javascript/proptab/index.html>

Opgave 18

Beschouw de volgende uitspraak: “Als ik te snel rijd, krijg ik een boete”.

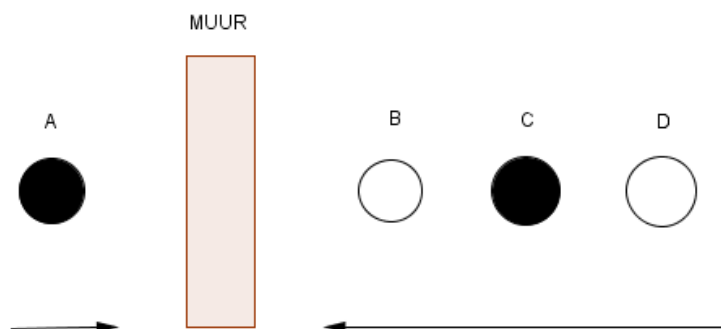
Welke van de volgende uitspraken zijn hiermee gelijkwaardig?

- (a) Als ik een boete krijg, dan heb ik te snel gereden.
- (b) Als ik geen boete krijg, dan heb ik niet te snel gereden.
- (c) Als ik niet te snel rijd, dan krijg ik geen boete.
- (d) Ik rijd niet te snel of ik krijg een boete.

Opgave 19

Er zitten vier kabouters in een gevangenis. Als een kabouter kan raden welke kleur zijn muts heeft, wordt hij vrijgelaten. Ze weten dat er twee witte en twee zwarte mutsen zijn. Ze mogen niet bewegen en niet praten en mogen alleen in de richting van de muur kijken (zie onderstaande figuur, waarop je kunt zien dat de kabouters A en C een zwarte muts op hebben en de kabouters B en D een witte muts). Ze zien dus hun eigen muts niet en kunnen niet over de muur heen kijken.

Welke kabouter weet de kleur van zijn muts? Verklaar.



Opgave 20

Je bent op met de fiets op weg naar Leuven en. Op een gegeven moment kom je op een splitsing waar je twee kanten op kunt. Je weet alleen niet welke kant je op moet. Bij de splitsing staan gelukkig twee mannetjes. Maar een van die mannetjes liegt altijd en de andere spreekt altijd de waarheid. Je weet niet welke van die twee de leugenaar is. Omdat de mannetjes ook weer niet zo heel veel zin hebben om je te helpen mag je een van hen een vraag stellen. Welke vraag stel je?

Oplossing.

Vraag aan een van de mannetjes: "Waar zal de andere man mij naar toewijzen als ik hem vraag welke kant het op is naar Leuven?" En kies dan de andere weg.

Kan je dit verklaren?

Opgave 21

Hieronder staan vijf logische raadsels.

Als je het antwoord echt niet kunt vinden, kijk dan eens op www.gnomon.bloggen.be (met als zoekopdracht: logische raadsels).

1
Een man staat voor een schilderij met de afbeelding van een man en vertelt ons het volgende: "Ik heb geen broers en zussen, maar de vader van deze man is mijn vaders zoon". Wie staat er op het schilderij?
2
Een jager verlaat zijn hut vroeg in de morgen en loopt een kilometer naar het zuiden. Daar ziet hij een beer die hij een kilometer recht naar het oosten achtervolgt, voordat hij in staat is de beer te schieten. Nadat hij de beer geschoten heeft, sleept hij deze een kilometer recht naar het noorden naar de hut waar hij die morgen vertrok. Welke kleur heeft de beer?
3
Op een dag ontmoet je Jan en Piet. Jan liegt op maandagen, dinsdagen en woensdagen en spreekt op de andere dagen de waarheid. Piet liegt op donderdagen, vrijdagen en zaterdagen, maar spreekt op de andere dagen van de week de waarheid. Ze zeggen het volgende tegen je: Jan: "Gisteren was één van de dagen waarop ik lieg." Piet: "Gisteren was voor mij één van de dagen waarop ik loog." Welke dag is het vandaag?
4
Er zijn drie schakelaars (A, B en C) waarvan er één is aangesloten op een lamp die zich in een andere kamer bevindt. Je mag maar één keer naar de kamer lopen om te kijken of de lamp brandt. Hoe kun je er toch achterkomen welke schakelaar de lamp bedient?
5
Welke dag was het gisteren, als het vier dagen voor overmorgen donderdag was?

Referenties

- [1] A. Roodhardt, M. Doorman, *Logisch redeneren*, Lesmateriaal voor experimenten Wiskunde C voor de vernieuwing van wiskunde in de tweede fase per 2011, commissie toekomst wiskundeonderwijs, 2009,
http://www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO%20Wiskunde%20C/Logisch%20Redeneren/oudeversies/20081029_redeneren_deel1.pdf .
- [2] Uitwisseling, jaargang 27, nummer 2 (met tekeningen van Kürt Maes).
- [3] Zomercursus Wiskunde, K. U. Leuven Campus Kortrijk, Academiejaar 2010-2011.
- [4] J. van Benthem, *Logica in actie*, met gratis cursusmateriaal op de volgende website:
www.spinoza.ou.nl/johan-van-benthem/logica-in-actie/cursusmateriaal .