MONTMORTGETALLEN

Rond 1700 hield de Franse wiskundige Pierre Rémond de Montmort zich bezig met kansrekenenen. In 1708 formuleerde hij het volgende probleem: stel dat iemand 10 brieven willekeurig bij 10 personen gaat afleveren, hoe groot is dan de kans dat niemand de brief ontvangt die voor hem bestemd is? Hij loste dit probleem zelf op in 1713.

Dit gaf aanleiding tot de zogenaamde *montmortgetallen* die men noteert als !n (niet te verwarren men n! = n-faculteit):

$$!n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \,.$$

Hierbij is !0 = 1
!1 = 0
!2 = 1
!3 = 2
!4 = 9
!5 = 44.

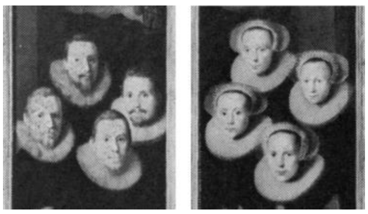
!n = het aantal manieren om n elementen onderling van plaats te verwisselen, zonder dat één van de elementen een vaste plaats behoudt. Wiskundigen spreken van *derangementen*, dit zijn permutaties zonder een vast element. In het Engels gebruikt men ook de term *subfactorials (subfaculteiten).*

Zo is

$$\begin{aligned} !4 &= 4! \cdot \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \\ &= 24 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) \\ &= 9 \,. \end{aligned}$$

Er zijn dus 9 manieren om 4 elementen te herschikken zonder dat er één element vast blijft.
Stel dat ABCD de oorspronkelijke rangschikking was, dan zijn dit de 9 ‘derangementen’:
BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB en DCBA.

HET PROBLEEM VAN DE VIER ECHTPAREN



Bij een quiz stelt de presentator aan de kandidaat vier echtparen voor (die telkens uit een man en een vrouw bestaan). Alleen wordt aan de kandidaat niet verteld wie bij wie hoort. Het is de bedoeling dat hij hiernaar raadt. Hoe groot is dan de kans dat hij geen enkel koppel juist raadt?

OPLOSSING.

De kans dat hij

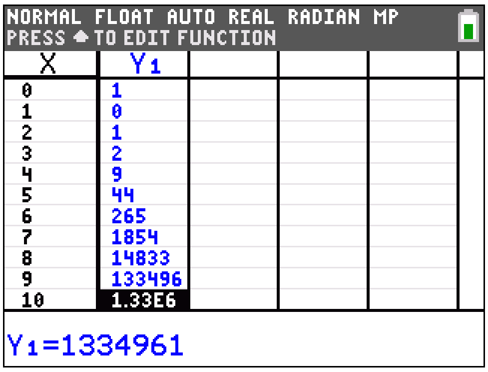
- de vier koppels juist raadt = $\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{0!}\right) = \frac{1}{24}$
- precies drie echtparen juist raadt = $\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) = 0$
- precies twee echtparen juist raadt = $\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = \frac{1}{4}$
- precies één echtpaar juist raadt = $\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{3}$
- geen enkel echtpaar juist raadt = $\frac{1}{0!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

MONTMORTGETALLEN OP EEN GRAFISCH REKENTOESTEL (TI-84)

Faculteiten (n!) bereken je via MATH > PROB > 4:!
Voor de montmortgetallen (!n) ga als volgt te werk.
Geef het volgende functievoorschrift in:

$$Y_1 = sum(seq((-1)^K/K!\,, K, 0, X)) * X!$$

en vraag dan de tabel op met functiewaarden.
In de tweede kolom verschijnen de montmortgetallen.


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP
PRESS ▲ TO EDIT FUNCTION

X	Y_1
0	1
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1854
8	14833
9	133496
10	1.33E6

Y_1=1334961

DRIE 'WEETJES'

$$\lim_{n\to\infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.3679\ldots.$$

(voor grote waarden van n is de kans dat er bij herschikking geen enkel element vast blijft ongeveer gelijk aan 1/e, waarbij e het getal van Euler is)

$$\int_{-1}^{+\infty} x^n\, e^{-(x+1)} dx = !n$$

148 349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9 (Madachy, 1979)