

Oefeningen

- 1 Ga na of de gegeven functie een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking.

(a) $xy' = 2y$; $y = 5x^2$

(b) $(x + y) dx + y dy = 0$; $y = \frac{1 - x^2}{2x}$

(c) $y'' + y = 0$; $y = 3 \sin x - 4 \cos x$

- 2 Zoek een differentiaalvergelijking die de gegeven familie als oplossing heeft.

(a) $y = e^x + C$

(b) $y = Ce^x$

(c) $y = C_1x + C_2$

- 3 Los volgende differentiaalvergelijkingen op door *scheiding van de veranderlijken*. Geef een expliciet functievoorschrift van de oplossingen.

(a) $x^4y' = 3y^2$

(b) $y' = x\sqrt{y}$

(c) $xy' = 3y$

(d) $(e^x + e^{-x})y' + y^2 = 0$

(e) $y' \tan x = y$

(f) $y - xy' = a(1 + x^2y')$

(g) $x dx + y dy = 0$

- 4 Los volgende differentiaalvergelijkingen op door *scheiding van de veranderlijken*.

(a) $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0$

(b) $xy' - y = y^3$

(c) $xyy' = 1 - x^2$

(d) $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

(e) $y' = y^2x^3$

(f) $y' = 5y$

(g) $y' = \frac{y}{x^2}$

- 5 Los volgende differentiaalvergelijkingen op door *scheiding van de veranderlijken*. Bepaal ook de particuliere oplossingen die voldoen aan de gegeven beginvoorwaarde.

(a) $(1 + e^x)yy' = e^x$
met $y = 1$ als $x = 0$

(b) $e^x dx - y dy = 0$
met $y = 1$ als $x = 0$

(c) $(xy^2 + x) dx + (x^2y - y) dy = 0$
met $y = 1$ als $x = 0$

(d) $\sin x dx + y dy = 0$
met $y = -2$ als $x = 0$

(e) $y' \sin x = y \ln y$
met $y = 1$ als $x = \frac{\pi}{2}$

(f) $(x^2 + 1) dx + \frac{1}{y} dy = 0$
met $y = 1$ als $x = -1$

- 6 Bepaal de kromme waarvan elk punt het midden is van het lijnstuk dat door de assen wordt afgesneden op de normaal in dat punt.

- 7 Zoek een familie krommen die de gegeven familie loodrecht snijdt.

(a) $x^2 + y^2 = C^2$

(b) $y = Cx^2$

(c) $y = Ce^x$

- 8 Een lichaam met onbekende temperatuur wordt in een kamer geplaatst met constante temperatuur 0°C . Na 10 minuten

is de temperatuur van het lichaam -30°C en na 20 minuten -15°C . Bepaal de onbekende begintemperatuur.

- 9 Volgens het *model van Verhulst* evolueert een populatie P in functie van de tijd t volgens

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

waarbij k en M parameters zijn.

- Bereken $P(t)$.
- Bereken $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.
- Wat is de betekenis van de parameter M ?
- In 1995 waren er voor het eerst 5 miljard mensen op onze planeet. Ecologen nemen aan dat voor de wereldbevolking geldt dat $k = 2.94 \cdot 10^{-12}$ (als t wordt uitgedrukt in jaren) en $M = 9.86 \cdot 10^9$. Schat het aantal mensen op Aarde in het jaar 2050 en in het jaar 2100.

- 10 De bevolking van een stad groeit evenredig met het aantal inwoners. Als na twee jaar de bevolking verdubbelt en na drie jaar de 20 000 mensen in de stad wonen, hoeveel inwoners waren er dan oorspronkelijk?

- 11 Een radioactief isotoop desintegreert tegen een tempo evenredig met de aanwezige hoeveelheid.

- Als N_0 de starthoeveelheid radioactief isotoop voorstelt, dan wordt de hoeveelheid op tijdstip t gegeven door

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

waarbij k een evenredigheidsconstante voorstelt. Bewijs dit.

- Stel t^* is de *halfwaardetijd*, i.e. de tijd nodig opdat de hoeveelheid radioactief isotoop halveert. Bewijs dat

$$k = \frac{\ln 2}{t^*}.$$

- In de jaren '70 ontstond heel wat commotie over de *lijkwade van Turijn*, de vermeende lijkwade van Jezus Christus. De ouderdom werd toen geverifieerd door de hoeveelheid radioactief koolstof-14 ^{14}C te meten: deze bedroeg 93 % van de oorspronkelijke hoeveelheid. Hoe oud is de lijkwade? Interpreteer het resultaat. De halfwaardetijd van ^{14}C is 5 568 jaar.

- 12 De snelheid van desintegratie van radioactief radium is recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid. Na 1 600 jaar blijft nog de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid over. Bereken het percentage gesintegreerd radium 100 jaar later.

- 13 De snelheid (in meter per seconde) waarmee water uit een gaatje stroomt dat zich h meter onder het wateroppervlak bevindt, is

$$v = c\sqrt{2gh}$$

met $c \approx 0.6$ en $g \approx 9.81$. Hoelang duurt het om een volledig met water gevulde fontein in de vorm van een halve bol met straal 2 m te laten leeglopen door een cirkelvormig gat met straal 0.1 m onderaan de fontein?

- 14 Laat $y = f(x)$ de functie zijn, waarvan de grafiek overeenkomt met de ronding

van een opgehangen ketting. Veronderstel dat f voldoende differentieerbaar is. In een willekeurig punt $p_1(x, y)$ van de kromme, is de spanningsvector F rakend aan de grafiek. Deze spanningsvector maakt een variabele hoek α met de georiënteerde x -as.

Stel g de gravitatieconstante, ρ de massa-lengteverhouding van de ketting en $p(x) = f'(x)$.

(a) Motiveer waarom de horizontale component $F \cos \alpha$ constant is.

(b) Bewijs dat de verticale component in $p_1(x, y)$ wordt gegeven door

$$g \cdot \rho \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

(c) Stel $a = \frac{F \cos \alpha}{g \cdot \rho}$. Maak gebruik van de betrekking $p(x) = \tan \alpha$ om te tonen dat $\forall x$:

$$p(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + (p(t))^2} dt$$

(d) Bewijs dat $\forall x$:

$$\frac{dp}{dx}(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (p(x))^2}$$

(e) Bewijs dat $\forall x$:

$$p(x) = \operatorname{sh} \left(\frac{x}{a} \right)$$

(f) Bewijs dat $\forall x$:

$$f(x) = a \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$$

15 Bepaal de kromme waarvan elk punt even ver van de oorsprong gelegen is als van het snijpunt van de raaklijn in dat punt met de x -as.

16 Los volgende differentiaalvergelijkingen met homogene coëfficiënten op.

$$(a) \quad y' = \frac{y}{x} - 1$$

$$(b) \quad y' = -\frac{x+y}{x}$$

$$(c) \quad (x-y)y \, dx - x^2 \, dy = 0$$

$$(d) \quad y \, dx + (2\sqrt{xy} - x) \, dy = 0$$

$$(e) \quad x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$$

$$(f) \quad y' = -\frac{4x^2 + 3xy + y^2}{4y^2 + 3xy + x^2}$$

17 (a) Bepaal de familie van krommen die voldoen aan de vergelijking

$$(x^2 + y^2) \, dx - 2xy \, dy = 0$$

(b) Welke van deze krommen gaan door de punten $P(4, 0)$ en $Q(1, 1)$?

18 Zoek een familie krommen die de familie

$$x^2 + y^2 = Cx$$

loodrecht snijdt.

19 Vier luizen bevinden zich in de hoekpunten van een vierkant gebied. Op een gegeven ogenblik beginnen ze samen te lopen (allemaal even snel) naar de luis die zich aan hun rechterkant bevindt, en ze blijven steeds in de richting van die luis lopen. Welke kromme beschrijven ze?

20 Los volgende differentiaalvergelijkingen met lineaire coëfficiënten op.

$$(a) \quad (2x - y + 4) \, dy + (x - 2y + 5) \, dx = 0$$

$$(b) \quad y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$$

$$(c) \quad y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

- 21 Bepaal de kromme die door $P(1, 0)$ gaat en waarvan de raaklijn in elk punt de y -as snijdt in een punt dat even ver van de oorsprong gelegen is als het raakpunt.

- 22 Los volgende *exacte differentiaalvergelijkingen* op.

(a) $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0$
 (b) $(x^3 - 3xy^2 + 2) dx - (3x^2y - y^2) dy = 0$
 (c) $\frac{2x}{y^2} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$

- 23 Bepaal de particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

die voldoet aan $y(0) = 2$.

- 24 Ter gelegenheid van het 100-jarig bestaan van de school, wordt een stijlvol fotoboek gedrukt. Een enquête leert dat als het boek 20 euro zou kosten, er 30 leerlingen het boek zullen kopen. Verder blijkt ook dat de elasticiteit $E = \frac{-p}{q} \frac{dp}{dq}$ van de vraag gelijk is aan

$$1 + \frac{p}{2q},$$

waarbij p de prijs voorstelt en q het aantal verkochte boek. Omdat het boek erg duur is om te drukken, beslist de directeur om het te verkopen tegen 50 euro. Hoeveel leerlingen zullen het boek kopen?

- 25 Los volgende differentiaalvergelijkingen op door gebruik te maken van een *integrerende factor* die enkel afhangt van x of enkel afhangt van y .

(a) $(x + y^2) dx - 2xy dy = 0$
 (b) $\left(\frac{y}{x}\right) dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$
 (c) $(x \cos y - y \sin y)y' + (x \sin y + y \cos y) = 0$

- 26 Los volgende *lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde* op.

(a) $y' - \frac{y}{x} = x$
 (b) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$
 (c) $y^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$

- 27 Los volgende *lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde* op. Bepaal de particuliere oplossingen die voldoen aan de gegeven beginvoorwaarde.

(a) $xy' + y - e^x = 0$
 met $y = b$ als $x = a$
 (b) $y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$
 met $y = 0$ als $x = 0$
 (c) $y' - y \tan x = \sec x$
 met $y = 0$ als $x = 0$

- 28 Bepaal de krommen waarvoor de driehoek gevormd door de x -as, een raaklijn en de loodlijn uit het raakpunt op de x -as een constante oppervlakte heeft.

- 29 Een tank van 50 liter bevat in het begin 10 liter zuiver water. Op een zeker moment komt er vuil water, dat 100 g zand per liter bevat, in de tank terecht tegen 4 liter per minuut. Het mengsel wordt ononderbroken gemengd en verlaat de tank tegen 2 liter per minuut. Hoeveel zand zit er in de tank op het ogenblik dat de tank overloopt?

- 30 De stroom I in een circuit met weerstand R en zelfinductie L aangedreven door een emk U voldoet aan

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}.$$

Bepaal de stroom $I(t)$ op een willekeurig tijdstip t bij een wisselspanning $U(t) = 3 \sin 2t$, een weerstand van 10Ω (ohm), een zelfinductie van $0,5$ H (henry) en een beginstroom van 6 A (ampère).

- 31 Los volgende *differentiaalvergelijkingen van Bernoulli* op.

(a) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$

(b) $2xyy' - y^2 + x = 0$

(c) $y dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right) dy = 0$

- 32 Bepaal de krommen waarvoor de raaklijn in elk punt de x -as snijdt in een punt dat even ver ligt van het raakpunt als van het punt $P(0, 1)$.

- 33 Bepaal een familie oplossingen van volgende *differentiaalvergelijkingen van Riccati*, door gebruik te maken van een gegeven oplossing y_1 . Bepaal een oplossing die voldoet aan de gegeven beginvoorwaarde.

(a) $y' - 2y + y^2 = -1$
met $y_1(x) = 1$; $y(1) = 3$

(b) $y' + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{1}{x^2}$
met $y_1(x) = \frac{1}{x}$; $y(1) = 2$

- 34 Bepaal alle oplossingen van volgende *homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met*

constante coëfficiënten. Bepaal – indien gevraagd – ook de oplossing die voldoet aan de gegeven beginvoorwaarde.

(a) $y'' + 2y' + y = 0$
met $y(0) = 1, y'(0) = 2$

(b) $y'' + y' + y = 0$
met $y(0) = 0, y'(0) = 3$

(c) $y^{(4)} = 0$
met $y(1) = 4, y'(1) = 5, y''(1) = 7, y'''(1) = 3$

(d) $y'' - 3y' = 0$
met $y(2) = 3, y'(2) = 1$

(e) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

(f) $y''' - y'' + y' - y = 0$

- 35 Bepaal alle oplossingen van volgende *differentiaalvergelijkingen van Euler*.

(a) $x^2y'' - 5xy' + y = 0$

(b) $2x^2y'' + 3xy' + y = 0$

(c) $x^3y''' - 2x^2y'' + 3xy' = 0$

- 36 Bepaal de volledige oplossing van volgende *lineaire differentiaalvergelijkingen van orde twee*, door gebruik te maken van een gegeven oplossing y_1 van de gereduceerde vergelijking.

(a) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$
met $y_1(x) = e^x$

(b) $x^2y'' - xy' + y = x$
met $y_1(x) = x$

- 37 Bepaal voor volgende *differentiaalvergelijkingen* de volledige oplossing van de gereduceerde vergelijking en bepaal een particuliere oplossing met behulp van de *methode van de variatie van de parameters*.

Bepaal – indien gevraagd – ook een oplossing die voldoet aan de gegeven beginvoorwaarden.

$$(a) \quad y'' - y = e^{2x} \\ \text{met } y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = \frac{4}{3}$$

$$(b) \quad y'' + 4y = \cos 2x \sin 2x \\ \text{met } y(\pi) = 2, y'(\pi) = \frac{1}{6}$$

$$(c) \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

$$(d) \quad y''' + y' = \sec x$$

$$(e) \quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2$$

$$(f) \quad x^2 y'' + 5xy' + 4y = \ln x$$

$$(g) \quad y'' - y = e^{2x} + \cos x$$

$$(h) \quad y'' - 9y = xe^{3x}$$

38 Bepaal een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijkingen uit oefening 37 met behulp van de *methode van de onbepaalde coëfficiënten*, voor zover deze van toepassing is.

39 Los volgende differentiaalvergelijkingen op.

$$(a) \quad x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$$

$$(b) \quad (2xy^2 - y) dx + x dy = 0$$

$$(c) \quad xy' + y = xy^2 \ln x$$

$$(d) \quad y = xy' + y' \ln(y')$$

$$(e) \quad x^2(y+1) dx + (x^3-1)(y-1) dy = 0$$

$$(f) \quad y' - y \frac{2x-1}{x^2} = 1$$

$$(g) \quad ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$$

$$(h) \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x$$

$$(i) \quad (1-x^2)y' + xy = a$$

$$(j) \quad xy' - \frac{y}{x+1} - x = 0$$

$$(k) \quad y'(x \cos y + a \sin 2y) = 1$$

$$(l) \quad y' = \left(1 + \frac{y-1}{2x} \right)^2$$

$$(m) \quad xy^3 dx = (x^2y + 2) dy$$

$$(n) \quad y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$$

$$(o) \quad y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$$

$$(p) \quad yy' + y^2 = \cos x$$

$$(q) \quad x dy + y dx = y^2 dx$$

$$(r) \quad y' = \frac{1}{x + \sin y}$$

$$(s) \quad e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$$

$$(t) \quad y' = \frac{y}{x} (1 + \ln y - \ln x)$$

$$(u) \quad (2e^x + y^4) dy - ye^x dx = 0$$

$$(v) \quad xy(xy^2 + 1)y' = 1$$

$$(w) \quad a(xy' + 2y) = xy y'$$

$$(x) \quad x dy - y dx = y^2 dx$$

$$(y) \quad y' \tan x - y = a$$