

Notities bij de nascholing

Differentiaalvergelijkingen

Eekhoutcentrum
11 mei 2005

Bart Windels

1 Algemeenheden

Zij I een open interval van $\mathbb{R}$ (eventueel onbegrensd) en $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie, dan bestaan er verbanden tussen de functie y , haar afgeleide functie y' en x .

Bijvoorbeeld als $y = x^2 + x$, dan is $y' = 2x + 1$, waaruit onder meer volgt dat

$$(y')^2 - 4y - 1 = 0.$$

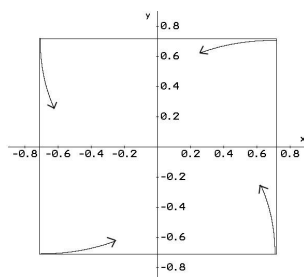
Wanneer we alleen over zulke betrekking beschikken en de functie zelf niet kennen, dan spreken we van een *differentialvergelijking* (DV). Het oplossen van de differentialvergelijking bestaat erin de functie terug te vinden.

We noemen $y = x^2 + x$ een *oplossing* van de differentialvergelijking $(y')^2 - 4y - 1 = 0$.

Omdat de hoogste afgeleide in de differentialvergelijking $(y')^2 - 4y - 1 = 0$ de eerste afgeleide is, spreken we van een differentialvergelijking *van de eerste orde*.

Algemeen is een differentialvergelijking *van de n -de orde* een betrekking tussen $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Differentialvergelijkingen ontstaan bij vele toepassingen, binnen en buiten de wiskunde.



■ ■ ■ Voorbeeld 1 Verliefde luizen

Vier luizen bevinden zich op de hoekpunten van een vierkant. Elke luis is verliefd op de volgende luis in tegenwijzerzin. Op een gegeven ogenblik beginnen alle luizen met dezelfde snelheid naar hun geliefde de lopen.

Bepaal een differentialvergelijking waaraan de weg van de luis in de rechterbovenhoek voldoet.

Oplossing

Wanneer de luis, die vertrekt vanuit de rechterbovenhoek, zich in het punt (x, y) bevindt, zal haar geliefde zich in het punt $(-y, x)$ bevinden, wegens symmetrieredenen. Zij beweegt dus in de richting die gegeven wordt door de rechte door de punten (x, y) en $(-y, x)$. De richtingscoëfficiënt van deze rechte is

$$\frac{y - x}{x + y}.$$

De baan $y = y(x)$ van de luis, die in de rechterbovenhoek vertrekt, voldoet dus aan de differentialvergelijking

$$y' = \frac{y - x}{x + y}.$$

Op pagina 8 zullen we deze differentialvergelijking oplossen, en zodoende te weten komen welke weg de luis precies volgt.

■ ■ ■

Het oplossen van een differentiaalvergelijking is niet altijd mogelijk, zeker niet met elementaire functies. Een oplossing hoeft ook niet uniek te zijn. Zo heeft de differentiaalvergelijking

$$y' = e^x$$

als oplossingen alle functies $y = e^x + C$, waarbij C een willekeurig reëel getal is. C noemen we ook *parameter*. De differentiaalvergelijking

$$y'' = e^x$$

heeft alle functies $y = e^x + C_1x + C_2$ met willekeurige $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ als oplossingen. C_1 en C_2 zijn hier parameters. Er kunnen dus één of meerdere parameters in de oplossing optreden. In deze voorbeelden komen precies zoveel parameters voor in de oplossing als de orde aangeeft. Dit is dikwijls zo, maar niet altijd. Zo heeft bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking $y'^2 + y^2 = 0$ één enkele oplossing $y = 0$, en $y'^2 + y^2 + 1 = 0$ heeft geen enkele oplossing.

Deze functies zijn bovendien de enige oplossingen.

Elke differentiaalvergelijking van de vorm $y = xy' + f(y')$ met f continu heeft een 1-parameterfamilie van lineaire vergelijkingen als oplossingen en daarbuiten nog een singuliere oplossing (tenzij f een veelterm van de eerste graad is). Zo'n differentiaalvergelijking noemen we een *differentiaalvergelijking van Clairaut*.

Een stel oplossingen van een differentiaalvergelijking afhankelijk van n parameters noemen we een *n-parameterfamilie van oplossingen*. De differentiaalvergelijking

$$y = xy' + y'^2$$

heeft de 1-parameterfamilie van oplossingen

$$y = Cx + C^2.$$

Ze heeft echter ook de oplossing $y = -\frac{x^2}{4}$, die niet in de familie $y = Cx + C^2$ begrepen is. Zo'n oplossing noemen we een *singuliere oplossing*.

■■■ Voorbeeld 2 Singuliere oplossing

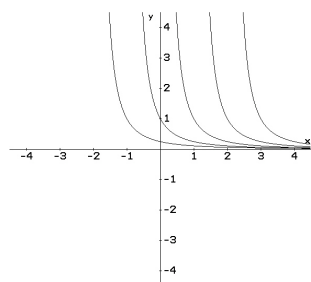
De differentiaalvergelijking $y' = -2y^{\frac{3}{2}}$ heeft als 1-parameterfamilie van oplossingen

$$y = \frac{1}{(x + C)^2}$$

en daarbuiten nog $y = 0$. Let wel dat alleen de dalende takken van de curven deel uitmaken van de oplossingen want $y' < 0$. Dezelfde differentiaalvergelijking heeft ook de 1-parameterfamilie van oplossingen

$$y = \frac{C^2}{(Cx + 1)^2}$$

zodat in deze vorm $y = 0$ wel in de 1-parameterfamilie van oplossingen voorkomt. Nu is er echter $y = \frac{1}{x}$ een singuliere oplossing. ■■■



Oplossingen van $y' = -2y^{\frac{3}{2}}$.

De uitdrukking “singuliere oplossingen” is dus relatief, afhankelijk van de vorm van de 1-parameterfamilie van oplossingen, die op haar beurt meestal afhangt van de gebruikte oplossingsmethode.

In het algemeen heeft een differentiaalvergelijking oneindig veel oplossingen. In de praktijk heeft men er meestal slechts één zogenaamde *particuliere oplossing* nodig die aan een of meer bijkomende voorwaarden voldoet. In het bijzonder zal men bij een differentiaalvergelijking van eerste orde vragen naar een oplossing waarvan de grafiek door een gegeven punt (x_0, y_0) gaat, om met andere woorden: een oplossing $y = f(x)$ waarvoor $y_0 = f(x_0)$.

■ ■ ■ Voorbeeld 3 Particuliere oplossing

Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = e^x$.

- Bepaal de algemene oplossing $y = f(x)$.
- Bepaal de particuliere oplossing die voldoet aan $f(0) = 3$.

Oplossing

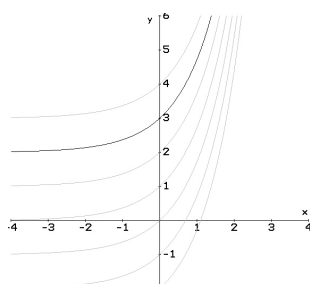
- Duidelijk is elke oplossing van de gegeven DV van de vorm

$$y = e^x + C$$

- Door $x = 0$ en $y = 3$ in te vullen, vinden we dat $3 = e^0 + C$ en dus $C = 2$.

De gezochte particuliere oplossing is

$$y = e^x + 2.$$



De familie $y = e^x + C$.

■ ■ ■

Voorbeelden tonen dat er punten in het vlak zijn waardoor geen oplossing gaat en dat er punten zijn waardoor meerdere oplossingen gaan.

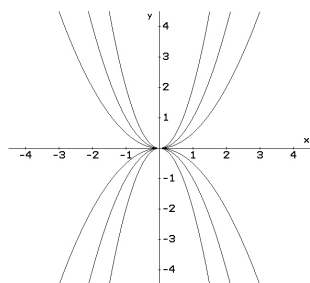
■ ■ ■ Voorbeeld 4

De differentiaalvergelijking

$$xy' = 2y$$

heeft als algemene oplossing $y = Cx^2$ zodat ze oneindig veel oplossingen heeft door $(0, 0)$ en geen enkele door om 't even welk ander punt van de y -as.

■ ■ ■



De familie $y = Cx^2$.

Zeer dikwijls zal een oplossing in *impliciete vorm* voorkomen; dit betekent: in de gedaante $f(x, y) = 0$ (met f continu). Dit betekent dat

iedere continu afleidbare functie $y = y(x)$, bepaald op een interval I , zodat geldt $\forall x \in I : f(x, y(x)) = 0$, een oplossing van de differentiaalvergelijking is. Zo is bijvoorbeeld

$$y^2 + x^2 = 1$$

een impliciete oplossing van de differentiaalvergelijking

$$yy' + x = 0$$

wat betekent dat zowel de functie $y = \sqrt{1 - x^2}$ als $y = -\sqrt{1 - x^2}$ oplossing is, bepaald op het interval $] -1, 1[$.

Het domein van een oplossing hoeft niet heel $\mathbb{R}$ te zijn. Indien de situatie dat vereist, kiezen we een open interval I als domein van een oplossing. Zo heeft de differentiaalvergelijking

$$y' \cos^2 x = 1$$

de oplossing $y = \tan x$ die slechts geldig is in deelintervallen van alle intervallen van de vorm $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$ ondanks het feit dat de differentiaalvergelijking zelf over x in heel $\mathbb{R}$ zinvol is.

Oefeningen
1–2

2 Differentiaalvergelijkingen van eerste orde

We bestuderen enkele oplossingsmethoden die toepasbaar zijn op differentiaalvergelijkingen die enkel de eerste afgeleide (en geen hogere afgeleiden) van de onbekende functie bevatten.

2.1 Scheiding van de veranderlijken

Sommige differentiaalvergelijkingen kunnen rechte reeks worden opgelost met behulp van primitieve functies.

■■■ Voorbeeld 5 Orthogonale krommen

Zoek een familie krommen die de familie

$$y = \frac{C}{x}$$

(met $C \in \mathbb{R}$) loodrecht snijden.

Oplossing

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in (x, y) aan de kromme $y = \frac{C}{x}$ is

$$y' = \frac{-C}{x^2} = -\frac{C}{x} \frac{1}{x} = -\frac{y}{x}.$$

Twee krommen snijden elkaar loodrecht als de raaklijnen aan beide krommen in elk snijpunt loodrecht op elkaar staan.

We veronderstellen stilzwijgend dat de beschouwde krommen de grafiek zijn van een afleidbare functie.

De richtingscoëfficiënt van de kromme die deze kromme loodrecht snijdt in (x, y) is dus

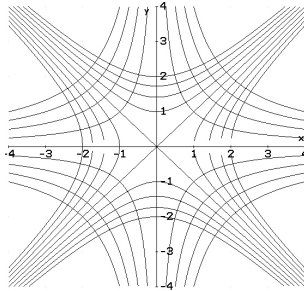
$$y' = \frac{x}{y}.$$

De gezochte krommen voldoen dus aan de differentiaalvergelijking

$$yy' = x$$

We integreren beide leden naar x .

$$\begin{aligned}\int yy' dx &= \int x dx \\ \int y dy &= \int x dx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + C'\end{aligned}$$



De families $y = \frac{C}{x}$ en $y^2 - x^2 = C$.

Door beide leden met 2 te vermenigvuldigen en $2C' = C$ te stellen, vinden we

$$y^2 - x^2 = C$$

■ ■ ■

In voorbeeld 5 kon de differentiaalvergelijking $y' = \frac{x}{y}$ worden geschreven met de veranderlijke y enkel in het linkerlid en de veranderlijke x enkel in het rechterlid: $yy' = x$. We zeggen dat de veranderlijken *scheidbaar* zijn.

Als we de afgeleide y' voorstellen met de Leibniz-notatie $\frac{dy}{dx}$ en deze schrijfwijze als breuk interpreteren, dan kan de vergelijking worden geschreven als

$$y \frac{dy}{dx} = x$$

en als

$$y dy = x dx$$

Indien de veranderlijken scheidbaar zijn, is het de gewoonte de differentiaalvergelijking op deze manier te noteren. Praktisch gezien betekent dit dat men de differentiaalvergelijking $f(x)dx = g(y)dy$ oplost door $\int f(x)dx = \int g(y)dy$ uit te rekenen.

■ ■ ■ Voorbeeld 6 Intraveneuze medicatie

Na een kleine operatie krijgt een patiënt een baxter, zodat er per uur 200 mg Ibuprofen in het bloed terecht komt. De pijnstillers wordt in het lichaam afgebroken met een snelheid die recht evenredig is met de aanwezige hoeveelheid: die snelheid bedraagt 30 % van de aanwezige hoeveelheid per uur.

Hoe zal de hoeveelheid Ibuprofen in het lichaam op langere termijn evolueren?

Oplossing

Laten we de tijd (in uren) voorstellen door x .

Laten we de hoeveelheid Ibuprofen in het lichaam (in mg) voorstellen door y .

Dan geldt:

$$\frac{dy}{dx} = 200 - 0,3y$$

Immers: de verandering van de hoeveelheid (dat is: $\frac{dy}{dx}$) bestaat uit een constante toevoeging van 200 mg per uur en een afbraak (vandaar het minteken) van 30 % van de aanwezige hoeveelheid (dat is: $0,3y$). De veranderlijken kunnen worden gescheiden. Als $200 - 0,3y \neq 0$, dan wordt de vergelijking

$$\begin{aligned} \frac{dy}{200 - 0,3y} &= dx \\ \int \frac{dy}{200 - 0,3y} &= \int dx \\ -\frac{1}{0,3} \ln |200 - 0,3y| &= x + C'' \\ \ln |200 - 0,3y| &= -0,3x + C' \\ 200 - 0,3y &= e^{-0,3x+C'} \\ 0,3y &= 200 - e^{-0,3x+C'} \\ y &= \frac{200}{0,3} - \frac{1}{0,3} e^{C'} e^{-0,3x} \\ y &= \frac{200}{0,3} - C e^{-0,3x} \end{aligned}$$

met $C \in \mathbb{R}_0^+$. Naast deze één-parameterfamilie van oplossingen, moeten we onderzoeken wat er gebeurt indien $200 - 0,3y = 0$. In dat geval is $y = \frac{200}{0,3}$. Deze functie voldoet ook aan de vergelijking en is dus een singuliere oplossing.

De algemene oplossing kan kortweg worden geschreven als

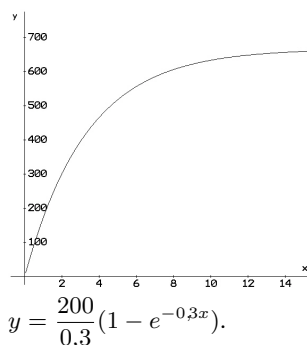
$$y = \frac{200}{0,3} - C e^{-0,3x} \quad \text{met } C \in \mathbb{R}^+.$$

Op het ogenblik $x = 0$ is er nog geen Ibuprofen in het lichaam, en er geldt dus dat $y = 0$. Invullen in de algemene oplossing levert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{200}{0,3} - C e^0 \\ C &= \frac{200}{0,3} \end{aligned}$$

De gewenste particuliere oplossing is dus

$$y = \frac{200}{0,3} - \frac{200}{0,3} e^{-0,3x} = \frac{200}{0,3} (1 - e^{-0,3x}).$$



scienceworld.wolfram.com/
physics/NewtonsLawofCooling.html

Voor de eenvoud kiezen we k positief. Het minteken moet worden bijgevoegd omdat de temperatuur daalt en dus is

$$\frac{dy}{dx} < 0.$$

Indien we het effect van deze medicatie op langere termijn willen kennen, berekenen we

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{200}{0,3} (1 - e^{-0,3x}) = \frac{200}{0,3} \approx 666,66$$

De hoeveelheid Ibuprofen in het lichaam zal streven naar 666,66 mg. ■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 7 Tijdstip van overlijden

In een bos waar het 13°C is, wordt om middernacht een lijk gevonden. Het lijk is nog 23°C warm en een uur later nog slechts 21°C . Wat is het tijdstip van overlijden?

Oplossing

Laten we de tijd (in uren) voorstellen door x .

Laten we de temperatuur (in $^\circ\text{C}$) van het lichaam voorstellen door y .

Wegens de koelingswet van Newton, weten we dat een object afkoelt met een snelheid die evenredig is met het verschil tussen de temperatuur van het object en de temperatuur van de omgeving.

Als we de evenredigheidsconstante voorlopig voorstellen door k , dan verkrijgen we

$$\frac{dy}{dx} = -k(y - 13)$$

We lossen deze vergelijking op door scheiding van de veranderlijken. Uit praktische redenen verwaarlozen we de oplossing $y = 13$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - 13} &= -k dx \\ \int \frac{dy}{y - 13} &= - \int k dx \\ \ln |y - 13| &= -kx + C' \\ y - 13 &= e^{-kx + C'} \\ y &= 13 + Ce^{-kx} \end{aligned}$$

Op het tijdstip $x = 0$ waarop het lijk gevonden wordt, is $y = 23$:

$$23 = 13 + Ce^0$$

en dus $C = 10$. We vinden alvast: $y = 13 + 10e^{-kx}$.

Een uur later, op tijdstip $x = 1$ is $y = 21$:

$$\begin{aligned} 21 &= 13 + 10e^{-k \cdot 1} \\ 0,8 &= e^{-k} \\ -k &= \ln 0,8 \\ k &= -\ln 0,8 \approx 0,223 \end{aligned}$$

We verkrijgen

$$y = 13 + 10e^{-0.223x}.$$

We mogen veronderstellend dat op het tijdstip van het overlijden de lichaamstemperatuur gelijk was aan $y = 37$. We moeten dus volgende vergelijking oplossen:

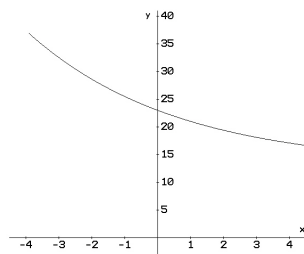
$$37 = 13 + 10e^{-0.223x}$$

$$2.4 = e^{-0.223x}$$

$$-0.223x = \ln 2.4$$

$$x = \frac{\ln 2.4}{-0.223} \approx -3.92$$

De dood is dus ongeveer vier uur eerder ingetreden. ■ ■ ■



$$y = 13 + 10e^{-0.223x}.$$

Oefeningen
3–15

2.2 Homogene coëfficiënten.

■ ■ ■ Voorbeeld 8 Verliefde luizen

Vier luizen bevinden zich op de hoekpunten van een vierkant met diagonaal 2. Elke luis is verliefd op de volgende luis in tegenwijzerzin. Op een gegeven ogenblik beginnen alle luizen met dezelfde snelheid naar hun geliefde de lopen. Welke weg volgen de luizen?

Oplossing

In voorbeeld 1 hebben we gevonden dat de weg die de luis in de rechterbovenhoek aflegt, voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$y' = \frac{y - x}{x + y}.$$

en dus

$$(x - y) + (x + y)y' = 0$$

Deze vergelijking kan niet worden opgelost door scheiding van veranderlijken. Met behulp van de hulpveranderlijke $u = \frac{y}{x}$, kunnen we de vergelijking wel herschrijven zodat de veranderlijken gescheiden kunnen worden. Als $y = ux$, dan is $y' = u'x + u$. De vergelijking wordt dus

$$(x - ux) + (x + ux)(u'x + u) = 0$$

$$(1 - u) + (1 + u)(u'x + u) = 0$$

$$1 - u + (1 + u)u'x + u + u^2 = 0$$

$$1 + (1 + u)u' + u^2 = 0$$

$$x(1 + u)\frac{du}{dx} = -1 - u^2$$

$$\frac{1 + u}{1 + u^2} du = -\frac{dx}{x}$$

Probeer maar. Het lukt niet.

Hierin zijn de veranderlijken u en x gescheiden. We lossen de differentiaalvergelijking op door beide leden te integreren.

$$\begin{aligned}\int \frac{1+u}{1+u^2} du &= \int -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{1}{1+u^2} du + \int \frac{u}{1+u^2} du &= -\int \frac{dx}{x} \\ \arctan u + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) &= -\ln|x| + C \\ \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) &= -\ln|x| + C \\ \ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) &= C - \arctan \frac{y}{x} \\ \ln \sqrt{x^2 + y^2} &= C - \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Overgang naar poolcoördinaten (ϑ, r) levert een mooiere vergelijking. We vinden

$$\begin{aligned}\ln r &= C - \vartheta \\ r &= e^{C-\vartheta}\end{aligned}$$

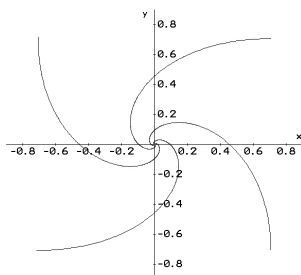
In de beginpositie is $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ en $r = 1$. Daaruit komt $1 = e^{C-\frac{\pi}{4}}$, en dus $C = \frac{\pi}{4}$. De baan van de luis die in de rechterbovenhoek vertrekt, is dus

$$r = e^{\frac{\pi}{4}-\vartheta}.$$

Dit is een logaritmische spiraal. De andere luizen bewegen ook op een logaritmische spiraal. Op analoge wijze vinden we immers dat hun baan gegeven wordt door

$$r = e^{\frac{3\pi}{4}-\vartheta}, \quad r = e^{\frac{5\pi}{4}-\vartheta} \quad \text{en} \quad r = e^{\frac{7\pi}{4}-\vartheta}.$$

■ ■ ■



$$\begin{aligned}r &= e^{\frac{\pi}{4}-\vartheta} \\ r &= e^{\frac{3\pi}{4}-\vartheta} \\ r &= e^{\frac{5\pi}{4}-\vartheta} \\ r &= e^{\frac{7\pi}{4}-\vartheta}\end{aligned}$$

De hulpveranderlijke $u = \frac{y}{x}$ leidt steeds tot de oplossing bij een differentiaalvergelijking van de vorm $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ indien P en Q homogeen zijn.

Definitie

Een functie $P : I_0 \times I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ noemen we *homogeen van orde n* als $\forall x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ zodanig dat (x, y) en $(\lambda x, \lambda y) \in I_0 \times I_1$ geldt dat $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y)$.

Als in de differentiaalvergelijking

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

P en Q homogeen van zelfde orde n zijn en als we veronderstellen dat $x \neq 0$, dan voeren we de hulpveranderlijke $u = \frac{y}{x}$ in.

We tonen dat in dat geval de differentiaalvergelijking omgezet kan worden in een differentiaalvergelijking waarbij men u in functie van x kan bepalen door scheiding van de veranderlijken. Vermits $y = xu$ geldt dat $y' = xu' + u$. Verder volgt uit de homogeniteit van P en Q dat

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x, xu) = x^n P(1, u) = x^n g_1(u) \\ \text{en} \quad Q(x, y) &= Q(x, xu) = x^n Q(1, u) = x^n g_2(u) \end{aligned}$$

waarbij $g_1 : u \mapsto P(1, u)$ en $g_2 : u \mapsto Q(1, u)$.

De oorspronkelijke vergelijking kan worden herschreven als

$$x^n g_1(u) + x^n g_2(u)(u'x + u) = 0,$$

wat vermits $x \neq 0$ equivalent is met

$$g_1(u) + g_2(u)(u'x + u) = 0,$$

en dus ook met

$$\frac{1}{x} + \frac{g_2(u)u'}{g_1(u) + ug_2(u)} = 0$$

als $g_1(u) + ug_2(u) \neq 0$.

In de laatste vergelijking zijn de veranderlijken te scheiden en is de oplossing uniek bepaald als $g_2(u) \neq 0$ wat op hetzelfde neerkomt als $Q \neq 0$ buiten $x = 0$.

Merk op dat men ook moet nagaan of $g_1(u) + ug_2(u) = 0$ geen oplossing bepaalt.

Oefeningen
16–19

2.3 Lineaire coëfficiënten

Een differentiaalvergelijking met lineaire coëfficiënten is een vergelijking van de vorm $(a_1x + b_1y + c_1) + (a_2x + b_2y + c_2)y' = 0$ of $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ waarbij $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ constanten zijn. We onderscheiden hierbij 4 gevallen.

Geval 1. Als $c_1 = c_2 = 0$ zijn de coëfficiënten homogeen van orde 1 en kan de differentiaalvergelijking opgelost worden met de methode sectie 2.2.

Geval 2. Als de determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ heeft het stelsel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

een unieke oplossing (h, k) . Als we dan $u = x - h$ en $v = y - k$ stellen, dan is

$$a_i x + b_i y + c_i = a_i u + b_i v \quad (i \in \{1, 2\}).$$

Omdat met u als onafhankelijke veranderlijke en met v als afhankelijke veranderlijke $\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$, wordt de vergelijking omgezet in

$$(a_1u + b_1v) + (a_2u + b_2v)\frac{dv}{du} = 0,$$

zodat we terugvallen op het geval 1.

Geval 3. Als de determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ en $b_2 \neq 0$ dan zijn er twee mogelijkheden. Ofwel zijn de vergelijkingen in bovenstaand stelsel gelijkwaardig, en dan bestaat er een λ zodat $a_1x + b_1y + c_1 = \lambda(a_2x + b_2y + c_2)$. Na deling door $a_2x + b_2y + c_2$ wordt de vergelijking $y' + \lambda = 0$ waaruit $y = -\lambda x + C$. We merken op dat $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ eveneens een oplossing is. Ofwel zijn de vergelijkingen in het stelsel tegenstrijdig. Dan bestaat er nog steeds een λ zodat $a_1x + b_1y = \lambda(a_2x + b_2y)$ en dus is $a_1x + b_1y + c_1 = \lambda(a_2x + b_2y + c_2) + c_1 - \lambda c_2$, waarbij $c_1 \neq \lambda c_2$. Na deling door $a_2x + b_2y + c_2$ wordt de vergelijking

$$\lambda + \frac{c_1 - \lambda c_2}{a_2x + b_2y + c_2} + y' = 0.$$

Gebruiken we de nieuwe veranderlijke $z = a_2x + b_2y + c_2$, dan is $z' = a_2 + b_2y'$ en dus wordt de vergelijking

$$\lambda + \frac{c_1 - \lambda c_2}{z} + \frac{z' - a_2}{b_2} = 0.$$

Hierin zijn de veranderlijken te scheiden.

Geval 4. Als $b_2 = 0$ dan is ofwel ook $b_1 = 0$ en herleidt de differentiaalvergelijking zich tot $y' = -\frac{a_1x + c_1}{a_2x + c_2}$, of anders is $a_2 = b_2 = 0$ met $b_1 \neq 0$ en dan zet de substitutie $z = a_1x + b_1y + c_1$ de vergelijking om in $z + c_2 \frac{z' - a_1}{b_1} = 0$, die eveneens scheiding van de veranderlijken toelaat.

De methoden voor differentiaalvergelijkingen met lineaire coëfficiënten zijn eveneens van toepassing voor het algemenere geval van een differentiaalvergelijking van de vorm

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

waarbij f een continue functie is.

■■■ Voorbeeld 9 Lineaire coëfficiënten

Los op: $(x + 2)y' = 2 - y$ voor $x \in \mathbb{R}^+$.

Oplossing

We stellen $u = x + 2$ en $v = y - 2$. Dan geldt $\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}$, en dus als

$$v \neq 0$$

$$\begin{aligned} uv' &= -v \\ \int \frac{dv}{v} &= - \int \frac{du}{u} \\ \ln |v| &= -\ln u + C' \\ |v| &= Cu^{-1} \\ v = Cu^{-1} &\text{ of } v = -Cu^{-1} \end{aligned}$$

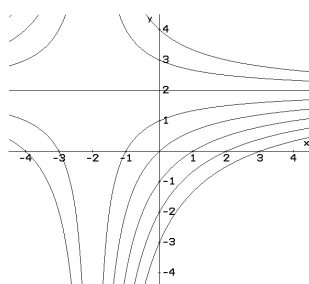
met $C > 0$. Samen met de particuliere oplossing $v = 0$, zijn alle oplossingen van de vorm

$$v = Cu^{-1}$$

met $C \in \mathbb{R}$. Dit levert

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{C}{x + 2} \\ y &= \frac{C + 2x + 4}{x + 2} \\ y &= \frac{2x + C'}{x + 2} \end{aligned}$$

■ ■ ■



De familie $y = \frac{2x + C}{x + 2}$.

Oefeningen
20–21

2.4 Exacte differentiaalvergelijkingen

■ ■ ■ Voorbeeld 10 Kostenfunctie

Als $K = K(q)$ de kostenfunctie bij de productie van q eenheden voorstelt, dan wordt de *elasticiteit* van de kosten gedefinieerd als

$$E(q) = \frac{\text{marginale kosten}}{\text{gemiddelde kosten}} = \frac{K'(q)}{\frac{K(q)}{q}} = \frac{q}{K} \frac{dK}{dq}.$$

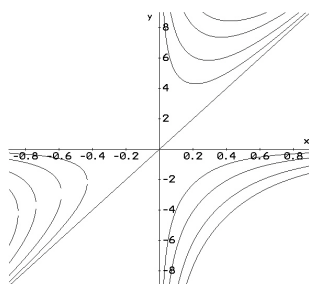
Vind de kostenfunctie als de elasticiteit gelijk is aan

$$E(q) = \frac{20q - K}{2K - 10q}$$

Oplossing

We moeten volgende differentiaalvergelijking oplossen:

$$\begin{aligned} \frac{q}{K} \frac{dK}{dq} &= \frac{20q - K}{2K - 10q} \\ q(2K - 10q) \frac{dK}{dq} &= K(20q - K) \\ K(K - 20q) + q(2K - 10q) \frac{dK}{dq} &= 0 \\ (K^2 - 20Kq) + (2Kq - 10q^2) \frac{dK}{dq} &= 0 \end{aligned}$$



De familie $K^2q - 10Kq^2 = C$.

Omdat in de praktijk $q > 0$ en $K > 0$, zijn enkel de takken uit het eerste kwadrant zinvolle oplossingen.

Enkele voorbeelden maken dit aanstonds duidelijk.

Het linkerlid is echter de impliciete afgeleide van $K^2q - 10Kq^2$. Daarom kan de vergelijking herschreven worden als

$$\frac{d}{dq}(K^2q - 10Kq^2) = 0$$

en dus is

$$K^2q - 10Kq^2 = C.$$

Deze uitdrukking bepaalt de kosten K impliciet als functie van de productie q . ■ ■ ■

In voorbeeld 10, kan de uitdrukking $K^2q - 10Kq^2$ als volgt worden bepaald.

Als een uitdrukking $\varphi(x, y)$, waarbij y een functie is van x , impliciet wordt afgeleid naar x , dan is het resultaat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'.$$

In het bovenstaande voorbeeld zoeken we dus een uitdrukking $\varphi(q, K)$ zodat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = K^2 - 20Kq \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial K} = 2Kq - 10q^2.$$

Dus vinden we

$$\varphi(q, K) = \int (K^2 - 20Kq) dq = K^2q - 10Kq^2 + C_1(K)$$

$$\varphi(q, K) = \int (2Kq - 10q^2) dq = K^2q - 10Kq^2 + C_2(q)$$

waarbij $C_1(K)$ nog mag afhangen van K (omdat enkel naar q werd geïntegreerd) en

waarbij $C_2(q)$ nog mag afhangen van q (omdat enkel naar K werd geïntegreerd).

Kiezen we $C_1(K) = C_2(q) = 0$, dan vinden we $\varphi(q, K) = K^2q - 10Kq^2$.

Bij een willekeurige differentiaalvergelijking $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, zal het meestal onmogelijk zijn een uitdrukking $\varphi(x, y)$ te vinden zodat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y),$$

of korter genoteerd

$$\nabla \varphi = (P, Q).$$

∇ wordt uitgesproken als 'nabla'.

Als dit toch mogelijk is, zoals in voorbeeld 10, dan noemen we de differentiaalvergelijking *exact*.

Definitie

De differentiaalvergelijking $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ heet *exact* indien er een continu afleidbare functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat waarvoor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y).$$

Eigenschap 2.1

Stel dat de differentiaalvergelijking $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ exact is, met $\nabla \varphi = (P, Q)$. Een continu afleidbare functie $y = y(x)$ is een oplossing als en slechts als y impliciet bepaald is door de vergelijking

$$\varphi(x, y) = C$$

voor een welbepaalde C .

Sommige exacte differentiaalvergelijkingen zijn onmiddellijk te herkennen en op te lossen, zoals bijvoorbeeld $ydx + xdy = 0 \Rightarrow xy = C$. Meestal moeten we echter twee problemen oplossen:

- (a) Hoe herkennen we een exacte differentiaalvergelijking?
- (b) Eens we weten dat de differentiaalvergelijking exact is, hoe bepalen we dan φ zodat $\nabla \varphi = f$?

Volgende eigenschap geeft alvast het antwoord op vraag (a).

Eigenschap 2.2

De differentiaalvergelijking $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ exact is als en slechts als

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

■■■ Voorbeeld 11

De vergelijking $(K^2 - 20Kq) + (2Kq - 10q^2)\frac{dK}{dq} = 0$ uit voorbeeld 10 is exact, omdat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dK}(K^2 - 20Kq) &= 2K - 20q \\ \frac{d}{dq}(2Kq - 10q^2) &= 2K - 20q. \end{aligned}$$

2.5 Integratiefactoren

Als de differentiaalvergelijking $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ niet exact is kan men trachten een continue functie $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ te vinden, met $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mu(x, y) \neq 0$, zodat de equivalente differentiaalvergelijking

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0$$

wel exact is. Als zo'n functie μ bestaat noemen we haar een *integratiefactor*.

Als P , Q en μ continu afleidbaar zijn dan is volgens en een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een integratiefactor μ dat

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

ofwel dat

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}Q - \frac{\partial \mu}{\partial y}P = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Is μ onbekend, dan is deze betrekking een zogenaamde partiële differentiaalvergelijking in μ . Deze is in het algemeen niet gemakkelijker op te lossen dan de differentiaalvergelijking zelf.

Als er echter een integratiefactor μ bestaat die uitsluitend afhangt van x , zeg $\mu : x \mapsto \mu(x)$ dan hebben we

$$\frac{d\mu}{dx}Q = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

en dus

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Dit wil onder meer zeggen dat het rechterlid eveneens functie is van x alleen. Als omgekeerd $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x)$ functie is van x alleen, dan is $\mu : x \mapsto e^{\int \varphi(x)dx}$ een integratiefactor, waarbij $\int \varphi(x)dx$ een willekeurige primitieve van φ voorstelt.

Analoog vindt men dat er een integratiefactor μ bestaat die enkel afhankelijk is van y als en alleen als

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \varphi(y)$$

een functie is van y alleen; in dat geval is $\mu : y \mapsto e^{\int \varphi(y)dy}$ een integrerende factor.

Er bestaat een integratiefactor afhankelijk van $x + y$ als en slechts als

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} - P = \varphi(x + y)$$

Oefeningen
25

functie van $x + y$ is. Als we $x + y = t$ stellen is in dat geval $\mu : t \mapsto e^{\int \varphi(t) dt}$. Er bestaat een integratiefactor afhankelijk van het product xy als en slechts als

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} = \varphi(xy)$$

functie van xy is. Als we $xy = t$ stellen is in dit geval opnieuw $\mu : t \mapsto e^{\int \varphi(t) dt}$.

2.6 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Definitie

Een *lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde* is een differentiaalvergelijking die in de vorm

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

kan worden geschreven.

Als P en $Q : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ continu en begrensd zijn, dan bestaat er voor elk punt $(x_0, y_0) \in I_0 \times \mathbb{R}$ een unieke oplossing $y = y(x)$ waarvoor $y(x_0) = y_0$. We nemen aan dat dit steeds het geval is. Is $Q = 0$ dan wordt de differentiaalvergelijking

$$y' + P(x)y = 0$$

wat we een *homogene* lineaire differentiaalvergelijking noemen. Dan zijn de veranderlijken te scheiden en is de algemene oplossing

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}$$

waarbij $\int P(x) dx$ een willekeurige maar vaste primitieve van P voorstelt.

Als we de vergelijking $y' + P(x)y = Q(x)$ in de differentiaalvorm schrijven, dan wordt dit

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0.$$

Stellen we $\tilde{P}(x, y) = P(x)y - Q(x)$ en $\tilde{Q}(x, y) = 1$, dan is

$$\frac{\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}}{\tilde{Q}} = P(x)$$

zodat we uit vorige sectie kunnen besluiten dat $e^{\int P(x) dx}$ een integratiefactor is.

Als we de differentiaalvergelijking $y' + P(x)y = Q(x)$ vermenigvuldigen met de factor $e^{\int P(x) dx}$, waarbij nog steeds $\int P(x) dx$ een willekeurige primitieve van P is, dan wordt de vergelijking

$$y'e^{\int P(x) dx} + yP(x)e^{\int P(x) dx} = Q(x)e^{\int P(x) dx}.$$

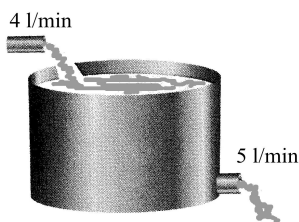
Het linkerlid is van de vorm $y'e^{u(x)} + u'(x)ye^{u(x)} = (ye^{u(x)})'$ zodat de laatste vergelijking eveneens kan geschreven worden als

$$(y e^{\int P(x)dx})' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Dit betekent dat

$$y e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

en dit levert de algemene oplossing.



■ ■ ■ Voorbeeld 12 Mengsels

Een waterzuiveringstank bevat 500 liter slijk dat bestaat uit 90 % water en 10 % zand. Tegen een snelheid van 4 liter per minuut wordt slijk in de tank gestort dat bestaat uit 50 % water en 50 % zand. Het slijk in de tank wordt onophoudelijk gemengd. Gelijktijdig loopt er ook 5 liter per minuut van dit mengsel uit de tank. Hoeveel zand zal er in de tank zitten na 1 uur?

Oplossing

Stel y is de hoeveelheid zand (uitgedrukt in liter) dat zich na x minuten in de tank bevindt.

Elke minuut zal er zich 1 liter minder in de tank bevinden. Na x minuten is er dus nog $500 - x$ liter in de tank. Omdat elke minuut ook 5 liter van het mengsel uit de tank stroomt, verliest de tank

$$\frac{5}{500 - x}y$$

liter zand per minuut. Er komt echter ook 2 liter zand per minuut in de tank bij. De toename van zand is dus

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{5}{500 - x}y.$$

We moeten dus de vergelijking

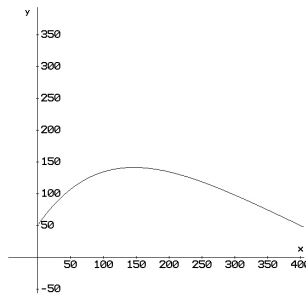
$$\frac{dy}{dx} + \frac{5}{500 - x}y = 2$$

oplossen. Deze vergelijking is lineair. We bepalen de integratiefactor

$$e^{\int \frac{5}{500 - x}dx} = e^{-5 \ln |500 - x|} = \frac{1}{(500 - x)^5}$$

De vergelijking wordt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(500-x)^5} \frac{dy}{dx} + \frac{5}{(500-x)^6} y &= \frac{2}{(500-x)^5} \\ \left(\frac{1}{(500-x)^5} y \right)' &= \frac{2}{(500-x)^5} \\ \frac{1}{(500-x)^5} y &= \int \frac{2}{(500-x)^5} dx \\ \frac{1}{(500-x)^5} y &= \frac{1}{2(500-x)^4} + C \\ y &= \frac{500-x}{2} + C(500-x)^5\end{aligned}$$



Hoeveelheid zand in de waterzuiveringstank.

Als $x = 0$, is $y = 50$, dus

$$50 = \frac{500-0}{2} + C(500-0)^5 \Rightarrow C = -\frac{200}{500^5}$$

Na 1 uur bevindt er zich dus

$$\frac{500-60}{2} - \frac{200}{500^5} (500-60)^5 \approx 114,45$$

liter zand in de waterzuiveringstank. ■ ■ ■

Oefeningen
27–30

2.7 Differentiaalvergelijkingen van Bernoulli

De differentiaalvergelijking

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

is als $m = 0$ of $m = 1$ opnieuw lineair. In andere gevallen vermenigvuldigen we beide leden met $(1-m)y^{-m}$ waarbij men kan opmerken dat voor $m > 0$, $y = 0$ een particuliere oplossing is. We verkrijgen dan

$$(1-m)y'y^{-m} + (1-m)P(x)y^{-m+1} = Q(x)(1-m).$$

Omdat $\frac{d}{dx}(y^{1-m}) = (1-m)y^{-m}y'$, is dit, als we $u = y^{1-m}$ stellen, equivalent met de lineaire vergelijking

$$\frac{du}{dx} + (1-m)P(x)u = Q(x)(1-m).$$



Jacob Bernoulli
(1654–1705)

Oefeningen
31–32



Jacopo Riccati
(1676–1754)

Oefeningen
33

2.8 Differentiaalvergelijkingen van Riccati

Voor de differentiaalvergelijking

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2$$

waarbij f_0, f_1 en $f_2 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ continu en begrensd zijn en $\forall x \in I_0 : f_2(x) \neq 0$, nemen we aan dat we een particuliere oplossing $x \mapsto y_1(x)$ kennen. We gebruiken de veranderlijke u , die gegeven wordt door $y = y_1 + \frac{1}{u}$, waaruit $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$. De differentiaalvergelijking wordt dan omgezet in

$$u' + (f_1(x) + 2f_2(x)y_1)u = -f_2(x)$$

welke lineair is in u . De oplossing $u = 0$ is niet ingevoerd omdat $f_2 \neq 0$.

3 Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

3.1 Definities en algemene eigenschappen

Definitie

Een *lineaire differentiaalvergelijking (LDV)* van orde n is een differentiaalvergelijking die in de vorm

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

kan worden geschreven.

De functies $a_0, a_1, \dots, a_n$ worden de *coëfficiënten* van de differentiaalvergelijking genoemd.

Indien $f = 0$ dan spreken we van een *homogene* lineaire differentiaalvergelijking (HLDV). De vergelijking

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

noemen we ook *homogene* of *gereduceerde* van de differentiaalvergelijking.

Eigenschap 3.3

Beschouw de HLDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

met coëfficiënten $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$. De verzameling van oplossingen is een n -dimensionale deelvectorruimte van $\mathbb{R}^I$.

Met andere woorden, indien $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ een stel van n lineair onafhankelijke oplossingen is van de HLDV, dan is de n -parameterfamilie

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

de algemene oplossing.

Eigenschap 3.4

Indien $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ een oplossing is van de LDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

en $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ een stel van n lineair onafhankelijke oplossingen is van de gereduceerde vergelijking, dan is de n -parameterfamilie

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p$$

de algemene oplossing van de LDV.

Om *alle* oplossingen van een LDV te kennen moeten dus twee problemen opgelost worden: een stel van n lineair onafhankelijke oplossingen bepalen van de gereduceerde vergelijking, alsook één oplossing van oorspronkelijke vergelijking. Zulke oplossing noemen we *particuliere oplossing*. Alvorens deze problemen te behandelen, vermelden we een existentie- en uniciteitsstelling.

Eigenschap 3.5

Indien $a_0, a_1, \dots, a_n$ en f continu zijn, en indien $x_0 \in I$ en $(y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n) \in \mathbb{R}^n$ gegeven zijn, dan bestaat er een unieke oplossing y van de LDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

die voldoet aan

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0^1 \\ y'(x_0) &= y_0^2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^n \end{aligned}$$

■ ■ ■ Voorbeeld 13

De differentiaalvergelijking

$$25x^2y'' + 25xy' - y = 0,$$

die we bijvoorbeeld kunnen beschouwen op het interval $\mathbb{R}_0^+$, heeft oplossingen $y_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/5}$ en $y_2 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{-1/5}$ (Ga dit na). Deze oplossingen zijn lineair onafhankelijk. Elke oplossing is dus van de vorm $y = C_1y_1 + C_2y_2$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, wat we ook kunnen schrijven als

$$y(x) = C_1x^{1/5} + C_2x^{-1/5}.$$

Om die oplossing te vinden waarvoor geldt dat $y(1) = 0$ en $y'(1) = 2$ bepalen we de afgeleide

$$y'(x) = \frac{C_1}{5}x^{-4/5} - \frac{C_2}{5}x^{-6/5}$$

en lossen we het stelsel

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1}{5}C_1 - \frac{1}{5}C_2 = 2 \end{cases}$$

op. We bekommen we $C_1 = 5, C_2 = -5$, zodat

$$y(x) = 5x^{1/5} - 5x^{-1/5}$$

de unieke oplossing van de differentiaalvergelijking is die voldoet aan de twee voorwaarden. ■ ■ ■

3.2 Homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

Definitie

Met een HLDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

waarbij de coëfficiënten $a_0, \dots, a_n$ constanten zijn, associëren we een veelterm

$$\phi(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$

die we *karacteristieke veelterm* noemen. De vergelijking $\phi(t) = 0$ noemen we de *karacteristieke vergelijking* van de HLDV.

We vermelden eerst enkele resultaten uit de algebra. Indien $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gegeven zijn, en we beschouwen de veelterm $\phi(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$, dan bestaan er complexe getallen $t_1, t_2, \dots, t_n$, zodat ϕ kan ontbonden worden als

$$\phi(t) = b_0(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n).$$

Hier zijn $t_1, \dots, t_n$ de (complexe) oplossingen van de vergelijking $\phi(t) = 0$. Deze wortels hoeven niet allen verschillend te zijn. Stel dat er k verschillende wortels $t_1, \dots, t_k$ zijn, met respectievelijke multipliciteit $m_1, m_2, \dots, m_k$ (zodat $\sum_{i=1}^k m_i = n$.) Als een wortel $t_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dan bestaat er een $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ zodat $t_j = \bar{t}_i$, en bovendien geldt dan dat $m_i = m_j$.

Indien we kunnen schrijven $\phi(t) = (t - t_i)^{m_i} \psi(t)$, met $m_i \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\psi(t_i) \neq 0$, dan zeggen we dat de wortel t_i *multipliciteit* m_i heeft.

Beschouw opnieuw de karakteristieke veelterm ϕ geassocieerd met de HLDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Voor elke reële wortel $t_i \in \mathbb{R}$ met multipliciteit $m_i \geq 1$ bepalen we m_i functies als volgt:

$$u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{t_i x}$$

$$u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x e^{t_i x}$$

$$u_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 e^{t_i x}$$

...

$$u_{m_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{m_i-1} e^{t_i x}$$

Voor elk paar wortels $t_j, \bar{t}_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ waarbij beide multipliciteit $m_j \geq 1$ hebben, en waarvoor $t_j = \alpha_j + i\beta_j$, met $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, bepalen we $2m_j$ functies als volgt:

$$\begin{aligned}
v_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x \\
w_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x \\
v_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x \\
w_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x \\
&\vdots \\
v_{m_j} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x \\
w_{m_j} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{m_j-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x
\end{aligned}$$

Door dit te doen voor alle wortels van de karakteristieke veelterm, bekomen we een stel van n oplossingen van de HLDV, waarvan men kan aantonen dat ze lineair onafhankelijk zijn.

■ ■ ■ Voorbeeld 14

De HLDV $y'' - 2y' + y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking $t^2 - 2t + 1 = 0$. 1 is een reële wortel met multipliciteit 2. Bijgevolg zijn de functies $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ en $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x e^x$ oplossing van de differentiaalvergelijking, en wordt de algemene oplossing gegeven door

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 15

De HLDV $y'' + y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking $t^2 + 1 = 0$. Er zijn twee complexe wortels, i en $-i$, elk met multipliciteit 1. Dus zijn de functies $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos x$ en $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$ oplossing van de differentiaalvergelijking, en wordt de algemene oplossing gegeven door

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 16

De HLDV $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 12y'' + 4y' - 13y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking $t^4 - 4t^3 + 12t^2 + 4t - 13 = 0$. Deze vergelijking heeft 4 verschillende oplossingen, elk met multipliciteit 1: 1, -1 , $2 + 3i$ en $2 - 3i$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \cos 3x + C_4 e^{2x} \sin 3x.$$

■ ■ ■

3.3 Differentiaalvergelijkingen van Euler

Definitie

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$b_n x^n y^{(n)} + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + b_{n-2} x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + b_1 x y' + b_0 y = 0$$

met $b_0, b_1, \dots, b_n$ constanten, noemen we een *differentiaalvergelijking van Euler*.

Deze differentiaalvergelijking zullen we beschouwen op $\mathbb{R}_0^+$. We voeren we een substitutie $x = e^z$ door. (Als we de differentiaalvergelijking willen beschouwen op $\mathbb{R}_0^-$, i.e. voor strikt negatieve x , dan kan de substitutie $x = -e^z$ gebruikt worden.)

Als y een functie is van x en $x = e^z$ dan kunnen we y ook beschouwen als functie van z . Er geldt, wegens de kettingregel, dat

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}.$$

Verder geldt dat

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}.$$

Men kan per inductie bewijzen dat voor elke $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k} \left(c_k \frac{d^k y}{dz^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1} y}{dz^{k-1}} + \dots + c_1 \frac{dy}{dz} \right),$$

met $c_1, \dots, c_k$ constanten.

Omdat de coëfficiënt van $y^{(k)}$ gelijk is aan $b_k x^k$, met b_k een constante, volgt dat substitutie $x = e^z$ de differentiaalvergelijking omzet in een differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$a_n \frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dz} + a_0 y = 0,$$

met $a_0, \dots, a_n$ constanten. Merk op dat deze vergelijking y bepaalt als functie van de hulpveranderlijke $z = \ln x$. Nadat we deze LDV van orde n met constante coëfficiënten hebben opgelost, leidt de substitutie $z = \ln x$ tot de algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.

■■■ Voorbeeld 17

De differentiaalvergelijking $4x^2 y'' + 4xy' + 1 = 0$ is een differentiaalvergelijking van Euler van orde 2. Substitutie

$$\begin{aligned} x &= e^z, \\ y' &= \frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

leidt tot de vergelijking

$$4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 1 = 0.$$

Deze HLDV met constante coëfficiënten heeft karakteristieke vergelijking

$$4t^2 + 1 = 0$$

en de wortels zijn $\frac{i}{2}$ en $-\frac{i}{2}$. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 1 = 0$ wordt gegeven door

$$y(z) = C_1 \cos \frac{z}{2} + C_2 \sin \frac{z}{2}.$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $4x^2 y'' + 4xy' + 1 = 0$ is dus

$$y(x) = C_1 \cos \ln \frac{x}{2} + C_2 \sin \ln \frac{x}{2}.$$

■ ■ ■

Oefeningen
35

3.4 Reductie van de orde

Voor lineaire differentiaalvergelijkingen van orde $n > 1$ bestaat er geen methode die algemeen van toepassing is. De volgende eigenschap is soms nuttig.

Eigenschap 3.6

Beschouw de LDV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Indien de functie $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ een oplossing is van de gereduceerde vergelijking en

$$\forall x \in I : y_1(x) \neq 0$$

dan zet invoering van de hulpveranderlijke u , bepaald door

$$y(x) = y_1(x)u(x)$$

gevolgd door de substitutie $w = u'$ de differentiaalvergelijking om in een LDV van orde $n - 1$ voor w .

Reductie van de orde kan steeds toegepast worden voor een LDV waarbij de coëfficiënt van y gelijk is aan nul:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' = f(x).$$

De constante functie 1 is immers een oplossing van de gereduceerde vergelijking.

■ ■ ■ Voorbeeld 18

Beschouw de HLDV van orde drie:

$$(x^3 \sin x)y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x)y'' + (6x \sin x + 2x^2 \cos x)y' - (6 \sin x + 2x \cos x)y = 0.$$

De functie $y_1 :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ is een oplossing van deze homogene vergelijking. We substitueren $y(x) = u(x)x$. Men heeft dan dat

$$\begin{aligned} y'(x) &= u(x) + u'(x)x \\ y''(x) &= 2u'(x) + u''(x)x \\ y'''(x) &= 3u''(x) + u'''(x)x, \end{aligned}$$

en de differentiaalvergelijking wordt herleid tot

$$(x^4 \sin x)u''' - (x^4 \cos x)u'' = 0,$$

of, na substitutie $w = u'$:

$$(x^4 \sin x)w'' - (x^4 \cos x)w' = 0.$$

wat op $]0, \pi[$ equivalent is met

$$(\sin x)w'' - (\cos x)w' = 0.$$

Dit is inderdaad een LDV van orde 2 voor de functie w . Om deze vergelijking op te lossen, merken we op dat w niet voorkomt, en zo is de constante afbeelding op 1 een oplossing van deze homogene vergelijking. Door dezelfde methode opnieuw toe te passen, en te stellen $v = w'$, verkrijgen we een LDV van orde 1:

$$v' - (\cot x)v = 0.$$

De algemene oplossing van deze vergelijking is

$$v = C_1 \sin x.$$

Uit $v = w'$ volgt dat dan de algemene oplossing van $(\sin x)w'' - (\cos x)w' = 0$ gegeven wordt door

$$w = -C_1 \cos x + C_2,$$

en daar $w = u'$ geldt dat

$$u = -C_1 \sin x + C_2 x + C_3.$$

Ten slotte volgt uit $y(x) = xu(x)$ dat

$$y = -C_1 x \sin x + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x.$$

Daar de parameters C_1 , C_2 en C_3 een willekeurige waarde in $\mathbb{R}$ kunnen aannemen, kunnen we de algemene oplossing evengoed schrijven als

$$y = C_1 x \sin x + C_2 x^2 + C_3 x.$$

Merk op dat we hierin ook de gegeven oplossing $y_1(x) = x$ terugvinden. ■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 19

Beschouw de LDV

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = x^2 e^x.$$

Een particuliere oplossing van de gereduceerde vergelijking wordt gegeven door $y_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$. (Ga dit na.) Stel $y(x) = u(x)e^x$. Dan is ook $y' = (u' + u)e^x$ en $y'' = (u'' + 2u' + u)e^x$. Als we dit substitueren in de differentiaalvergelijking, en stellen $w = u'$, dan bekomen we volgende LDV van orde 1:

$$u' - \frac{1}{x}u = x.$$

$A(x) = \frac{1}{x}$ is een integrerende factor, en voor de algemene oplossing vindt men

$$u = C_1 x + x^2.$$

Verder volgt dat $w = \frac{C_1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2$, en

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 e^x + \frac{x^3}{3}e^x + C_2 e^x.$$

Voor de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking kunnen we ook schrijven:

$$y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x + \frac{1}{3}x^3 e^x.$$

Merk op dat $x^2 e^x$ en e^x een paar lineair onafhankelijke oplossingen is van de gereduceerde vergelijking (waarbij dus ook de oorspronkelijk gegeven oplossing y_1). Verder is $\frac{1}{3}x^3 e^x$ een particuliere oplossing van de LDV. ■ ■ ■

3.5 Variatie van de parameters

We beschouwen opnieuw een lineaire differentiaalvergelijking

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

met $a_0, a_1, \dots, a_n$ en f functies gedefinieerd op een open interval I , en $\forall x \in I : a_n(x) \neq 0$.

Indien een stel $\{y_1, \dots, y_n\}$ van n lineair onafhankelijke oplossingen van de gereduceerde vergelijking gekend is, dan kan men een particuliere oplossing van de LDV vinden van de vorm

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

met functies $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Men kan gemakkelijk nagaan dat functies $c_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ geschikt zijn indien hun afgeleiden $c'_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + \dots + c'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ c'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} = 0 \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = \frac{f}{a_n} \end{cases}$$

Inderdaad, als $c'_i : I \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$ hieraan voldoen, en we stellen

$$y := \sum_{i=1}^n c_i y_i,$$

dan is

$$y' = \sum_{i=1}^n c'_i y_i + \sum_{i=1}^n c_i y'_i = \sum_{i=1}^n c_i y'_i,$$

wegens de eerste vergelijking in het stelsel, en verder

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{i=1}^n c_i y''_i \\ y''' &= \sum_{i=1}^n c_i y'''_i \\ y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Ten slotte

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n c'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)} = \frac{f}{a_n} + \sum_{i=1}^n c_i y_i^{(n)},$$

wegens de laatste vergelijking. Er volgt dat

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i^{(k)} \right) + f = \sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{k=0}^n a_k y_i^{(k)} \right) + f = f$$

daar alle functies y_i oplossing zijn van de gereduceerde vergelijking. Hiermee is aangetoond dat $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ een oplossing is.

In de praktijk bepaalt men de afgeleiden $c'_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ door het bovenstaand stelsel op te lossen met de methode van Cramer, om vervolgens van elk van deze functies een primitieve te bepalen. Men kan bewijzen dat de determinant

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

niet nul is voor $x \in I$, zodat het stelsel inderdaad een oplossing heeft.

■ ■ ■ Voorbeeld 20

Beschouw de LDV

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Merk op dat we deze vergelijking dienen te beschouwen op een interval dat 0 niet bevat, bijvoorbeeld op $\mathbb{R}_0^+$. Voor de gereduceerde vergelijking $y'' - 2y' + y = 0$ vonden we in reeds een stel van lineair onafhankelijke oplossingen $y_1 = e^x$ en $y_2 = xe^x$.

Om een particuliere oplossing te vinden beschouwen we het volgende stelsel:

$$\begin{cases} c'_1 e^x + c'_2 x e^x = 0 \\ c'_1 e^x + c'_2 (x+1) e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

De determinant van het stelsel is

$$\begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (x+1) e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Met de methode van Cramer vinden we

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ \frac{e^x}{x} & (x+1) e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -1$$

en

$$c'_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

We nemen primitieven $c_1 = -x$, $c_2 = \ln|x|$, en bekomen de particuliere oplossing

$$y = -x e^x + \ln|x| x e^x.$$

De algemene oplossing van de LDV wordt gegeven door:

$$y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + \ln|x| x e^x.$$

■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 21

Beschouw de LDV van orde drie:

$$(x^3 \sin x)y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x)y'' + (6x \sin x + 2x^2 \cos x)y' - (6 \sin x + 2x \cos x)y = x^4 \sin^2 x.$$

In voorbeeld 18 hebben we reeds de algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking gevonden: $y_1 = x \sin x$, $y_2 = x^2$ en $y_3 = x$ zijn drie lineair onafhankelijke oplossingen. We zoeken nog een particuliere oplossing $y_p = c_1 x \sin x + c_2 x^2 + c_3 x$. Hiertoe beschouwen we het stelsel

$$\begin{cases} c'_1 x \sin x + c'_2 x^2 + c'_3 x = 0 \\ c'_1 (\sin x + x \cos x) + c'_2 2x + c'_3 = 0 \\ c'_1 (2 \cos x - x \sin x) + c'_2 2 = x \sin x. \end{cases}$$

De determinant van het stelsel is

$$\begin{vmatrix} x \sin x & x^2 & x \\ \sin x + x \cos x & 2x & 12 \\ \cos x - x \sin x & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^3 \sin x.$$

Nu vinden we met de methode van Cramer:

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 & x \\ 0 & 2x & 1 \\ x \sin x & 2 & 0 \end{vmatrix}}{x^3 \sin x} = -1$$

$$c'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x \sin x & 0 & x \\ \sin x + x \cos x & 0 & 12 \\ \cos x - x \sin x & x \sin x & 0 \end{vmatrix}}{x^3 \sin x} = \cos x$$

en

$$c'_3 = \frac{\begin{vmatrix} x \sin x & x^2 & 0 \\ \sin x + x \cos x & 2x & 0 \\ 2 \cos x - x \sin x & 2 & x \sin x \end{vmatrix}}{x^3 \sin x} = \sin x - x \cos x.$$

We bepalen een primitieve van elk van deze functies, bijvoorbeeld:

$$c_1 = -x \quad c_2 = \sin x \quad c_3 = -2 \cos x - x \sin x.$$

Een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$\begin{aligned} y_p &= -x^2 \sin x + x^2 \sin x - x(2 \cos x + x \sin x) \\ &= -2x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

De algemene oplossing van de LDV luidt

$$y = C_1 x \sin x + C_2 x^2 + C_3 x - 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Men kan nagaan dat men dezelfde oplossing bekomt door de methode van de reductie van de orde meteen toe te passen op de niet-homogene vergelijking. ■ ■ ■

Oefeningen
37

3.6 Methode van de onbepaalde coëfficiënten

De volgende methode leidt snel tot een particuliere oplossing van een LDV met constante coëfficiënten

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

indien f een van de volgende gedaanten aanneemt:

$$f(x) = P(x)e^{ax} \quad \text{of} \quad f(x) = P(x) \cos ax \quad \text{of} \quad f(x) = P(x) \sin ax.$$

met P een veelterm en $a \in \mathbb{R}$. Beschouw bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P(x)e^{ax}.$$

Als P een veelterm is van graad $n \geq 0$ en a is wortel van de karakteristieke veelterm met multipliciteit $m \geq 0$, dan bestaat er een oplossing van de LDV van de vorm $y = V(x)e^{ax}$, met V een veelterm van graad $n + m$. Men vindt de particuliere oplossing door

$$y_p(x) = (c_0 x^{n+m} + c_1 x^{n+m-1} + \dots + c_{n+m-1} x + c_{n+m})e^{ax}$$

te substitueren in de differentiaalvergelijking, en de coëfficiënten c_i , $i \in \{0, \dots, n + m\}$ te bepalen. Daarom wordt deze methode de *methode van de onbepaalde coëfficiënten* genoemd.

Indien $f(x) = P(x)e^{ax} \cos bx$ of $f(x) = P(x)e^{ax} \sin bx$, met P een veelterm van graad $n \geq 0$ en $a + bi$ wortel van de karakteristieke veelterm met multipliciteit $m \geq 0$, dan substitueren we een particuliere oplossing van de gedaante

$$y_p = V_1(x)e^{ax} \cos bx + V_2(x)e^{ax} \sin bx,$$

met V_1, V_2 veeltermen van graad $n + m$.

■ ■ ■ Voorbeeld 22

De differentiaalvergelijking $y' - y = e^x$ is een LDV van orde 1, en kan dus opgelost worden met de methode beschreven in het vorige hoofdstuk. De differentiaalvergelijking voldoet echter ook aan de voorwaarden om de methode van de onbepaalde coëfficiënten te passen, met P de constante afbeelding op 1 ($n = 0$) en $a = 1$ een oplossing van de karakteristieke vergelijking $t - 1 = 0$ met $m = 1$.

We zoeken een particuliere oplossing van de vorm

$$y_p = (c_0x + c_1)e^x.$$

Indien we y_p en $y'_p = (c_0x + c_1 + c_0)e^x$ in de differentiaalvergelijking substitueren, verkrijgen we de vergelijking $c_0e^x = e^x$, waaruit volgt dat $c_0 = 1$. Voor c_1 kunnen we een willekeurige waarde nemen, bijvoorbeeld $c_1 = 0$. We bekomen dan de particuliere oplossing $y_p = xe^x$. De algemene oplossing van de LDV is

$$y = Ke^x + xe^x.$$

Merk op dat indien we $c_1 \neq 0$ kiezen, we de particuliere oplossing $y = (x + c_1)e^x$ vinden, wat ook leidt tot de algemene oplossing $y = Ke^x + xe^x$. ■ ■ ■

■ ■ ■ Voorbeeld 23

We beschouwen de differentiaalvergelijking $y'' - y = x \cos 2x$. De algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking wordt gegeven door $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. We zoeken nu een particuliere oplossing van de vorm

$$y_p = (c_0x + c_1) \cos 2x + (d_0x + d_1) \sin 2x.$$

Substitutie in de differentiaalvergelijking leidt tot de vergelijking

$$(-5c_0x - 5c_1 + 4d_0) \cos 2x + (-5d_0x - 5d_1 - 4c_0) \sin 2x = x \cos 2x.$$

Door coëfficiënten gelijk te stellen vinden we $c_0 = -\frac{1}{5}$, $c_1 = 0$, $d_0 = 0$, $d_1 = \frac{4}{25}$. Bijgevolg is

$$y_p = -15x \cos 2x + 425 \sin 2x$$

een particuliere oplossing, en wordt de algemene oplossing gegeven door

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}x \cos 2x + \frac{4}{25} \sin 2x.$$

■ ■ ■

De methode kan ook toegepast worden wanneer f een som is van termen van de gedaante $P(x)e^{ax}$, ... Wegens de lineariteit geldt immers dat indien y_1 oplossing is van $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_1$ en y_2

is oplossing van $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_2$, dan is $y_1 + y_2$ oplossing van $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_1 + f_2$.

■ ■ ■ Voorbeeld 24

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' - 2y = 4x^2 + e^{3x}.$$

De karakteristieke vergelijking $t^2 - t - 2 = 0$ heeft wortels -1 en 2 . De differentiaalvergelijking $y'' - y' - 2y = 4x^2$ ($a = 0$) heeft een particuliere oplossing van de vorm $y_1 = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$, en $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ heeft een particuliere oplossing van de vorm $y_2 = d_0 e^{3x}$. Substitutie in de differentiaalvergelijking leidt tot $y_1 = -2x^2 + 2x - 3$ en $y_2 = \frac{1}{4}e^{3x}$. Nu is $y = y_1 + y_2 = -2x^2 + 2x - 3 + \frac{1}{4}e^{3x}$ een particuliere oplossing van $y'' - y' - 2y = 4x^2 + e^{3x}$. De algemene oplossing wordt gegeven door

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3 + \frac{1}{4}e^{3x}.$$