

PARADOXEN 4

Dr. Luc Gheysens

DE COMPLEXE WERELD VAN DE COMPLEXE GETALLEN

Historische nota.

Omstreeks 1500 werden in Italië wedstrijden georganiseerd voor het oplossen van derdegraadsvergelijkingen. Niccolo Fontana (ca. 1500-1557), bijgenaamd Tartaglia (letterlijk 'de stotteraar') ontdekte een formule die een oplossing leverde voor de vergelijking $x^3 = ax + b$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Voor de vergelijking $x^3 = 6x + 9$ geeft dit de volgende oplossing:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 4.$$

Girolamo Cardano (1501-1576) publiceerde als eerste deze formule in zijn *Ars Magna* (1545) en daarom spreken we nu over de formule van Cardano. Deze wiskundige, medicus, filosoof en astroloog was één van de meest kleurrijke figuren uit de 16^{de} eeuw. Omdat hij een horoscoop van het leven van Christus publiceerde, werd hij een tijdlang gevangen gezet wegens ketterij. Het verhaal gaat dat hij de juiste datum van zijn overlijden voorspelde. In 1576 pleegde hij zelfmoord ...

Het was echter een tijdgenoot Rafael Bombelli (1526-1572) die door het toepassen van de formule van Tartaglia op de vergelijking $x^3 = 15x + 4$ als bij toeval de complexe getallen introduceerde. Als je de formule toepast op die vergelijking, bekom je de oplossing

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Op het eerste gezicht is dit geen reëel getal omdat $\sqrt{-121}$ niet bestaat. Bombelli maakte nu de volgende veronderstellingen:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \quad \text{en} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

en slaagde erin het stelsel in a en b, bepaald door deze twee uitdrukkingen, op te lossen. Hij vond $a = 2$ en $b = 1$. Dan is

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Dit is meteen ook een oplossing van de vergelijking $x^3 = 15x + 4$.

De complexe getallen zouden echter pas tot volle bloei komen vanaf de 18^{de} eeuw:

- Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduceerde de notatie $i = \sqrt{-1}$ en gebruikte als eerste de benaming 'complex getal' voor een uitdrukking van de vorm $a + bi$, waarbij a en b reële getallen zijn en $i^2 = -1$. Voor de opeenvolgende machten van i geldt dan: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, enzovoort...
- Leonhard Euler (1707-1783) bewees de formule $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. In het bijzonder is dan $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, zodat hieruit de beroemde formule van Euler volgt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

- Abraham de Moivre (1667- 1754) bewees dat $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Als je bij het rekenen met complexe getallen de rekenregels voor reële getallen toepast, of rekenregels voor complexe getallen verkeerd toepast, bots je op een aantal merkwaardige vaststellingen, zoals blijkt uit de onderstaande berekeningen.

$1 = -1$

$$1 = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

$i = -i$

- Bewijs 1.

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

- Bewijs 2.

$$\begin{aligned} i &= \sin 180^\circ - i \cos 180^\circ \\ &= (\sin 60^\circ - i \cos 60^\circ)^3 \quad (\text{formule van de Moivre}) \\ &= [-i(i \sin 60^\circ + \cos 60^\circ)]^3 \\ &= [i^3 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)]^3 \\ &= i^9 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) \quad (\text{formule van de Moivre}) \\ &= i (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) \\ &= -i. \end{aligned}$$

$i = 1$

- Bewijs 1.

Stel $z = \sqrt{i} + \sqrt{-i}$, dan is $iz = i(\sqrt{i} + \sqrt{-i}) = \sqrt{i^3} + \sqrt{-i^3} = \sqrt{-i} + \sqrt{i} = z$.

Hieruit volgt dat $i = 1$.

▪ Bewijs 2.

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{2 \cdot (-1)^2} = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \sqrt{-1} = 1 \Leftrightarrow i = 1$$

$i^2 = 1$

Voor alle reële getallen x en y geldt: $\sqrt{x - y} = i\sqrt{y - x}$.

Voor $x = \cos \alpha$ en $y = \sin \alpha$, is $\sqrt{\cos \alpha - \sin \alpha} = i\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha}$ (1)

Voor $x = \sin \alpha$ en $y = \cos \alpha$, is $\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} = i\sqrt{\cos \alpha - \sin \alpha}$ (2)

Uit (1) en (2) volgt dan dat

$$\sqrt{\cos \alpha - \sin \alpha} \cdot \sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} = i^2 \sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} \cdot \sqrt{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

zodat $i^2 = 1$.

$2\pi i = 0$

De formule van Euler geldt voor alle reële waarden van x: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Stel hierin $x = 2\pi$, dan is $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Pas nu op beide leden van de gevonden gelijkheid $e^{2\pi i} = 1$ de natuurlijke logaritmische functie $\ln$ toe:

$$\ln e^{2\pi i} = \ln 1,$$

dan volgt hieruit dat $2\pi i = 0$.

$\pi = -\pi$

Wegens de formule van Euler is

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

en ook

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1.$$

Bijgevolg is $e^{-i\pi} = e^{i\pi}$, zodat $(e^{-i\pi})^i = (e^{i\pi})^i$.

Omdat $i^2 = -1$, geldt dus dat $e^\pi = e^{-\pi}$.

Pas nu op beide leden van de gevonden gelijkheid de natuurlijke logaritmische functie $\ln$ toe, dan volgt hieruit dat $\pi = -\pi$.

$$1 = 2$$

$$\sqrt{\frac{-1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{-4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{-1}} \Rightarrow \frac{i}{2} = \frac{1}{2i} \Rightarrow i\left(\frac{i}{2} + \frac{3}{2i}\right) = i\left(\frac{1}{2i} + \frac{3}{2i}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

en dus is $1 = 2$.

$$e = 1$$

Stel $f = 2e$, waarbij e het getal van Euler is ($e = 2,71828\dots$). (1)

dan is $f^{2\pi i} = 2^{2\pi i} \cdot e^{2\pi i}$.

Wegens de formule van Euler is $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, zodat $f^{2\pi i} = 2^{2\pi i}$.

Pas nu op beide leden van deze gelijkheid de natuurlijke logaritmische functie $\ln$ toe, dan volgt hieruit dat $f = 2$, zodat wegens (1) $2e = 2$ en dus $e = 1$.

We eindigen met de merkwaardige vaststellingen dat een complex getal tot de macht een complex getal een reëel getal kan opleveren en dat i een reëel getal is.

$$i^i = 0,207879576\dots$$

Wegens de formule van Euler is

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

Dan is $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = i^i$ en omdat $i^2 = -1$ volgt hieruit dat $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207879576\dots$

$$i \text{ is reëel}$$

We tonen aan dat de imaginaire eenheid i kan geschreven worden als een reële kettingbreuk.

$$\begin{aligned} i &= 1 + (i - 1) \\ &= 1 + \frac{(i-1)(i+1)}{i+1} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{2}{i+1}$$

$$= 1 - \frac{2}{2 + (i-1)}.$$

$$\text{Hieruit volgt dat } i - 1 = -\frac{2}{2 + (i-1)}$$

$$= -\frac{2}{2 - \frac{2}{2 + (i-1)}}$$

$$= -\frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \frac{2}{2 - \dots}}}}.$$

Dit wordt uiteindelijk een reële kettingbreuk.