

PROBLEMEN MET PI

Historische nota

Het getal pi ($\pi = 3,14159265\dots$) dat de verhouding uitdrukt tussen de omtrek en de diameter van een willekeurige cirkel, is wellicht het getal dat het meest tot de verbeelding spreekt van de wiskundigen. Het duikt op in heel wat wiskundige formules en theorieën o.a.

- in het voorschrift voor de Gausscurve voor de normale verdeling in statistiek:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- in de formule van Stirling voor de benadering van $n!$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- de beroemde en eenvoudige formule van Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- de integraal van Poisson:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

- ...

Het symbool π (de eerste letter van het Griekse woord περίμετρος voor omtrek) werd in 1706 voor het eerst gebruikt door de Engelsman William Jones. Het wordt ook wel eens **de constante van Archimedes** genoemd, omdat deze Griekse wiskundige een ingenieuze manier vond om pi te berekenen met behulp van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken bij een cirkel. Men spreekt ook wel van **het Ludolfiaans getal**, waarmee men verwijst naar Ludolf van Ceulen, een Nederlandse wiskundige die rond 1600 de eerste 35 decimalen van pi berekende.

In de voorbije eeuwen hebben heel wat befaamde en minder bekende wiskundigen een elegante formule gevonden om het getal pi te berekenen. Je kunt een indrukwekkende lijst terugvinden op <http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html>. We vermelden er hier vier en geven ook een eenvoudig bewijs voor de laatste formule, die door Leonard Euler werd opgesteld.

Formule van Vieta (1593) : $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$ (een oneindig product)

Formule van Wallis (1616-1702) : $\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \dots \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n} \dots$ (een oneindig product)

Formule van Gregory (1671), ook wel formule van Leibniz (1682) genoemd :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \text{ (een oneindige som)}$$

Formule van Euler (1707-1783): $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ (een oneindige som) .

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Bewijs voor de formule van Euler.

De veeltermfunctie $p(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$ heeft de getallen $x_1, x_2, \dots, x_n$ als nulwaarden en bovendien is $p(0) = 1$.

Via Maclaurinreeks voor $\sin x$ kunnen we het voorschrift voor de functie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ schrijven onder de vorm

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Deze functie f heeft als nulwaarden $\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ en bovendien is $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Euler paste nu het bovenstaande resultaat voor een veeltermfunctie toe op de functie f en kwam zo tot de formule

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

en dus

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots$$

Door nu in beide leden de coëfficiënt van x^2 te bepalen, vindt men dat

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} - \dots$$

waaruit dan onmiddellijk de formule van Euler volgt, nl.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wat is pi?

Volgens een wiskundige: “Pi is het getal dat de verhouding uitdrukt tussen de omtrek van een cirkel en zijn diameter.”

Volgens een natuurkundige: “Pi is $3,1415927 \pm 0,00000005$ ”.

Volgens een ingenieur: “Pi is 3,14”.

Hoe kan ik cijfers na de komma van het getal pi onthouden?

In de loop van de geschiedenis werden er heel wat pogingen ondernomen om pi zo nauwkeurig mogelijk te bepalen. Hieronder staan de eerste 1000 cijfers na de komma van pi afgebeeld:

$\pi = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375$
 105820974944592307816406286208998628034825342117067982
 148086513282306647093844609550582231725359408128481117
 450284102701938521105559644622948954930381964428810975
 665933446128475648233786783165271201909145648566923460
 348610454326648213393607260249141273724587006606315588
 174881520920962829254091715364367892590360011330530548
 820466521384146951941511609433057270365759591953092186
 117381932611793105118548074462379962749567351885752724
 891227938183011949129833673362440656643086021394946395
 224737190702179860943702770539217176293176752384674818
 467669405132000568127145263560827785771342757789609173
 637178721468440901224953430146549585371050792279689258
 923542019956112129021960864034418159813629774771309960
 518707211349999998372978049951059731732816096318595024
 459455346908302642522308253344685035261931188171010003
 137838752886587533208381420617177669147303598253490428
 755468731159562863882353787593751957781857780532171226
 8066130019278766111959092164201989

Er bestaat een heel onderzoeksgebied naar het gebruik van mnemotechnieken om de cijfers van π te onthouden. Dit onderzoek staat bekend als *Pipphilologie*. Het woord is een duidelijk woordspeling op Pi zelf en het linguïstische onderzoeksgebied filologie (Engels: philology). De techniek bestaat er in een zin op te bouwen waarin elk woord zo gekozen is, dat het aantal letters ervan overeenkomt met de opeenvolgende decimalen van pi.

Het bekendste voorbeeld van een geheugensteuntje voor de cijfers van π komt van Isaac Asimov:

*How I want a drink, alcoholic of course, after the
heavy lectures involving quantum mechanics!*

In dit voorbeeld staat het aantal letters in ieder woord voor de opeenvolgende cijfers van π : 3,14159265358.79. Er zijn pipphilologen die gedichten hebben geschreven om meer dan 100 cijfers te coderen.

Een Nederlands voorbeeld (de *ij* telt voor één letter):

Wie π voor 't eerst berekende hij sterft nooit!

Of in Oud-Nederlands:

Eva o lief, o zoete hartedief, uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen.
3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8

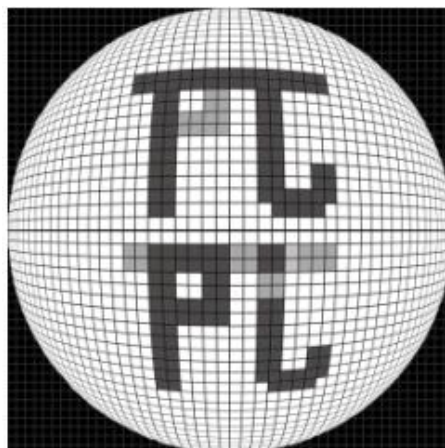
Nog een leuke vondst:

Ook u kunt u zeker vergissen.
3, 1 4 1 5 9

Uw zwakke brein kan plots verkeerd beslissen.
2 6 5 3 5 8 9

Op pi-dag, 14 maart, wordt wereldwijd op verschillende wiskundeafdelingen van universiteiten feest gevierd. Pi-dag wordt op 14 maart gevierd, omdat in de Amerikaanse schrijfwijze voor data 14 maart geschreven wordt als 3/14 en 3,14 is de driecijferige benadering voor π (bron: wikipedia).

Ter gelegenheid van pi-dag ontwierp de Vlaamse wiskunstenaar Peter Raedschelder het pi-logo:



Hieronder staan enkele merkwaardige berekeningen in verband met het getal pi. Kan jij telkens ontdekken welke fout er werd gemaakt?

$\pi = 3,14$



Bewijs.

Stel $p = \frac{\pi + 3,14}{2}$,

dan is $\pi + 3,14 = 2p$

$\Downarrow$

$$(\pi + 3,14)(\pi - 3,14) = 2p(\pi - 3,14)$$

$\Downarrow$

$$\pi^2 - 9,8596 = 2p\pi - 6,28p$$

$\Downarrow$

$$\pi^2 - 2p\pi = 9,8596 - 6,28p$$

$\Downarrow$

$$\pi^2 - 2p\pi + p^2 = 9,8596 - 6,28p + p^2$$

$\Downarrow$

$$(\pi - p)^2 = (3,14 - p)^2$$

$\Downarrow$

$$\pi - p = 3,14 - p$$

$\Downarrow$

$$\pi = 3,14$$

$\pi = 0$

Eerste bewijs.



Volgens de formule van Euler is $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, waarbij $i^2 = -1$.

Dan is $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ en ook $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$.

Dus is

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi}$$

$\Downarrow$

$$(e^{i\pi})^i = (e^{-i\pi})^i$$

$\Downarrow$

$$e^{i^2\pi} = e^{-i^2\pi}$$

$\Downarrow$

$$e^{-\pi} = e^{\pi}$$

$\Downarrow$

$$\pi = -\pi$$

$\Downarrow$

$$\pi = 0$$

Tweede bewijs.

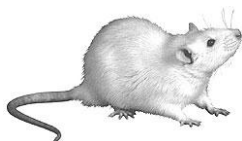
Bekijk de volgende tabel met oneindig veel rijen en oneindig veel kolommen. In elke rij komt precies één keer het getal π en één keer $-\pi$ voor en in de overige cellen staat overal 0. De getallen π en $-\pi$ schuiven in elke volgende rij telkens één plaatsje op naar links.

π	$-\pi$	0	0	0	0	...
0	π	$-\pi$	0	0	0	...
0	0	π	$-\pi$	0	0	...
0	0	0	π	$-\pi$	0	...
...	...	...	...	...	...	...

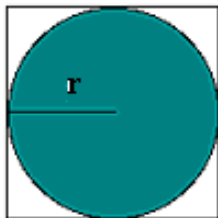
Wanneer men nu de som maakt van de getallen in elke horizontale rij, bekomt men tekens 0. Dit betekent dat de totale som van alle getallen uit de tabel gelijk is aan 0.

Wanneer men echter de getallen per kolom optelt, blijkt dat de som van alle getallen uit de eerste kolom gelijk is aan π en vanaf de tweede kolom wordt dit telkens 0. Dit betekent dat de totale som van alle getallen uit de tabel gelijk is aan π .

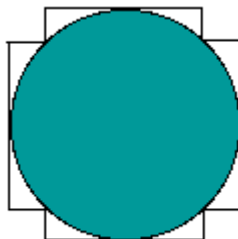
$\pi = 4$



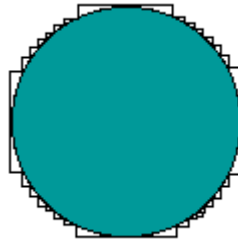
Om een cirkel met straal $r = 0,5$, tekenen we een vierkant. De omtrek van het vierkant is dan gelijk aan 4.



We vinden blijkbaar een betere benadering voor de omtrek van de cirkel, wanneer we aan de vier hoeken van het vierkant stukjes wegnippen en zo een achthoek bepalen. Merk op dat de omtrek van die achthoek eveneens gelijk is aan 4.



We herhalen nu dit procédé en construeren op die manier een 16-hoek, een 32-hoek ... die steeds nauwer aansluit bij de cirkelomtrek, maar waarvan de omtrek steeds gelijk blijft aan 4.

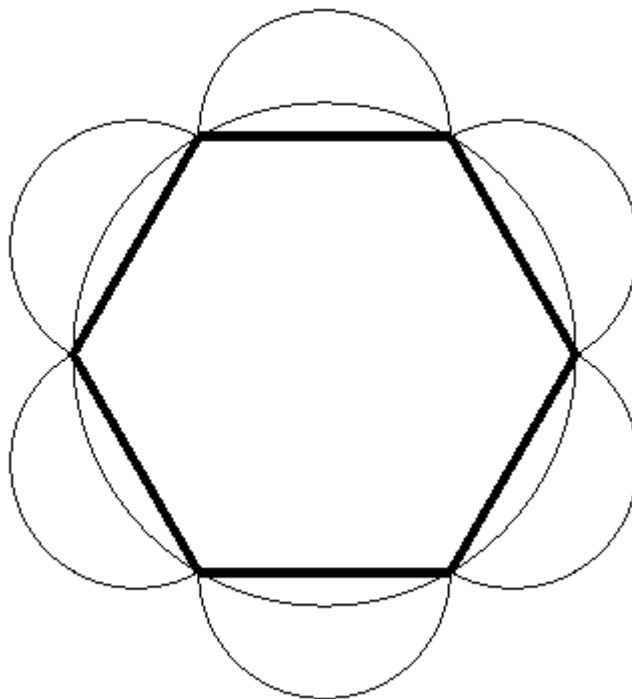


In de limiet bekomen dan een ‘veelhoek’(de zogenaamde veelhoek van Kuhn met omtrek gelijk aan 4) die overgaat in de cirkel en bijgevolg is de omtrek van die cirkel gelijk aan $2 \cdot \pi \cdot (0,5) = 4$, waaruit volgt dat $\pi = 4$.

$\pi = 2$

Eerste bewijs.

Stel dat p_n de omtrek is van een regelmatige n -hoek, die ingeschreven is in een cirkel met straal r . Op alle zijden van deze veelhoek construeren we een halve cirkel zoals op de onderstaande figuur.



De som van de lengten van alle cirkelbogen samen is dan gelijk aan

$$l_n = \frac{\pi}{2} \cdot p_n .$$

Als we nu het aantal zijden n laten naderen naar oneindig, zal p_n naderen naar de omtrek van de cirkel en dus is

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi r = \pi^2 \cdot r. \quad (1)$$

Anderzijds zal de figuur gevormd door de cirkelbogen ook steeds beter aansluiten bij de cirkelomtrek wanneer n toeneemt en dus is

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 2\pi r. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan dat $\pi = 2$.

Tweede bewijs.

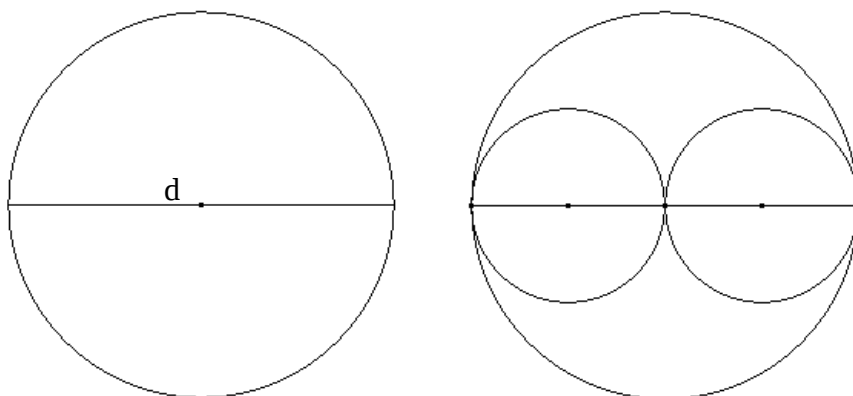
We starten met een cirkel met diameter d en als omtrek $p_1 = \pi d$. Hierin tekenen we twee kleinere cirkels waarvan de diameter slechts de helft is van d . De som van de omtrekken van deze twee cirkels is dan $p_2 = \pi d/2 + \pi d/2 = \pi d$. We herhalen hierop het procédé en bekommen nu vier kleinere cirkels met diameter $d/4$. De som van de omtrekken van deze vier cirkels is $p_4 = 4\pi d/4 = \pi d$. Wanneer we dit ‘eindeloos’ blijven herhalen bekommen we een figuur die bestaat uit steeds kleiner wordende cirkeltjes, maar waarvan de som van de omtrekken constant gelijk blijft aan πd . :

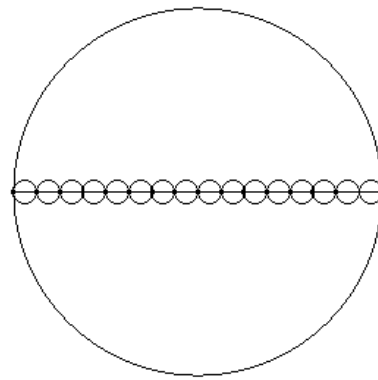
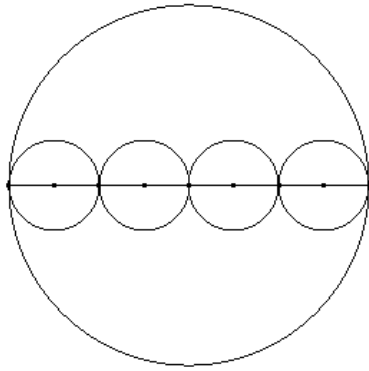
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \pi d. \quad (1)$$

Anderzijds stellen we vast dat de cirkelboogjes steeds nauwer aansluiten bij de diameter zodat de som van de omtrekken ook nadert tot $2d$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 2d. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dan dat $\pi = 2$.





$\pi = 2\sqrt{2}$



Stel $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) \cdot dx$, waarbij $f(\sin x)$ een functie van $\sin x$ is.

Stel $x = \pi - u$, dan is

$$I = - \int_{\pi}^0 (\pi - u) f(\sin(\pi - u)) du$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) du$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx \quad (\text{noem de veranderlijke weer } x).$$

Wegens de lineariteit van de bepaalde integraal, volgt hieruit dat $I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - I$.

Dit betekent dat $2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$, m.a.w.

$$2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx. \tag{1}$$

Stel nu $f(t) = t \sin t$, dan is $f(\sin x) = \sin x \cdot x$. Vul dit in in (1):

$$2 \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi \int_0^{\pi} x \sin x dx. \tag{2}$$

Door op beide leden van (2) partiële integratie toe te passen, vindt men dat $2(\pi^2 - 4) = \pi^2$, zodat $\pi^2 = 8$ en bijgevolg is $\pi = 2\sqrt{2}$.