

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EERSTE BEWIJS.

Merk op

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ 4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ &\vdots \\ (n-1)^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n-3 \\ n^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n-3 + 2n-1 \end{aligned}$$

De driehoek gevormd door de getallen in het linkerlid noemen we $\Delta 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 3 & & & & & \\ 1 & 3 & 5 & & & & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & & & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 1 & \dots & & \dots & 2n-3 & & \\ 1 & \dots & & \dots & 2n-3 & 2n-1 & \end{array} \quad \longleftarrow \Delta 1$$

We rangschikken nu al deze getallen anders in driehoek $\Delta 2$:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2n-1 & & & & & \\ & 2n-3 & 2n-3 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \\ 9 & \dots & \dots & 9 & & & \\ 7 & \dots & \dots & 7 & 7 & & \\ 5 & \dots & \dots & 5 & 5 & 5 & \\ 3 & \dots & \dots & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \longleftarrow \Delta 2$$

En we rangschikken ze nog eens ander in driehoek Δ_3 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 & & & & & & & & \\
 3 & & 1 & & & & & & \\
 5 & & 3 & & 1 & & & & \\
 7 & & 5 & & 3 & & 1 & & \\
 9 & & 7 & & 5 & & 3 & & 1 \\
 \vdots & & & & & & & & \\
 2n-3 & & \dots & & & & \dots & & 1 \\
 2n-1 & & 2n-3 & & & & \dots & & 1
 \end{array} \quad \longleftarrow \Delta_3$$

Wegens de voorafgaande opmerking is de som van alle getallen in elk van deze driehoeken precies de gezochte som.

Plaats nu in gedachten deze drie driehoeken bovenop elkaar zodat op elke positie drie getallen boven elkaar komen te staan (één uit elke driehoek). Op elke positie is de som van die drie getallen dan gelijk aan $2n + 1$. Het aantal getallen in elke driehoek is gelijk aan

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Conclusie: de som van alle getallen in de driehoeken samen is gelijk aan

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (2n+1) \frac{n(n+1)}{2}$$

en hieruit volgt het vooropgestelde resultaat.

TWEEDE BEWIJS

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] &= [(n+1)^3 - n^3] + [n^3 - (n-1)^3] + \dots + (3^3 - 2^3) + (2^3 - 1^3) \\
 &= (n+1)^3 - 1 \\
 &= n^3 + 3n^2 + 3n. \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] &= \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1) \\
 &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Uit (1) = (2) volgt na een klein beetje rekenwerk de gewenste formule.