

GRAFEN

FABIEN DECRUYENAERE

Sint-Amanscollege
Kortrijk

1 HET BEGRIP 'GRAAF'.

Grafentheorie is een jong vakgebied, dat de laatste halve eeuw een explosieve groei heeft doorgemaakt en dat vele toepassingen kent. Er zijn weinig wiskundige disciplines waarvan je de 'geboorte' exact kan bepalen, maar wel bij grafen! De oorsprong van grafentheorie ligt namelijk in het befaamde 'Königsberg bridge problem' : de befaamde Leonhard Euler (1707-1783) had de gewoonte om geregeld een wandeling te maken in Königsberg (het huidige Kaliningrad) dat toen 7 bruggen telde, en stelde zich daarbij de volgende vraag :

'Bestaat er een wandeling, die begint op één van de oevers of eilandjes, die elk van de 7 bruggen juist één keer aandoet en die eindigt op de plaats waar je gestart bent?'

('Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis', Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), pp. 128-140.)

Het duurde 200 jaar vooraleer het eerste boek over grafentheorie verscheen, nl. 'Theorie der endlichen und unendlichen Graphen' (Teubner, Leipzig, 1936) door de Hongaarse wiskundige Dénes König (1884-1944) in 1936. Sindsdien is grafentheorie geëvolueerd tot een populair onderdeel van de Wiskunde met talrijke toepassingen binnen de Wiskunde maar ook en vooral daarbuiten, in informatica, scheikunde, economie, electronica, linguïstiek,... Grafen spelen bovendien een cruciale rol in onze moderne samenleving, denk maar aan het wegennet, de spoorwegen, de buizenstelsels van gas, water en electriciteit, het kabelnet, telefoonnet, internet, etc.

Het concept 'graaf' mag dan heel eenvoudig zijn - vandaar ook de vele toepassingen - voor de definitie en de notaties bestaan heel wat variaties. Schrik dus niet als je in een boek een andere definitie vindt en in een ander boek nog een andere definitie! Het is zeker aan te raden, als u een boek over grafentheorie raadpleegt, heel aandachtig de definities te lezen. Wij geven twee vaak voorkomende definities :

Definitie 1.1 Een (niet-gerichte) graaf $G = (V, E)$ bestaat uit een eindige niet-lege puntenverzameling $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en een eindige lijnenverzameling $E \subseteq E(V)$, waarbij $E(V) = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V\}$.

Definitie 1.2 Een (niet-gerichte) graaf $G = (V, E)$ bestaat uit :

1. een eindige niet-lege puntenverzameling V ;
2. een eindige lijnenverzameling E ;
3. een functie $\phi : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$ zodat $\forall e \in E : \# \phi(e) \in \{1, 2\}$.

Kort gezegd bestaat een graaf dus uit punten en lijnen die deze punten verbinden. In definitie 1.1 zijn geen lussen mogelijk en kunnen punten slechts door hoogstens één lijn verbonden worden. In definitie 1.2 is het wel mogelijk dat er lussen voorkomen en dat twee verschillende punten door meerdere lijnen verbonden worden (als ϕ niet injectief is). Definitie 1.2 is de meest algemene definitie. Een graaf die voldoet aan definitie 1.1 wordt dan *enkelvoudig* genoemd : bij een enkelvoudige graaf zullen we de lijn e waarbij $\phi(e) = \{u, v\}$ ook vaak kort als uv of vu noteren. Het adjectief 'niet-gericht' duidt er op dat er geen pijltjes op de lijnen voorkomen, dit in tegenstelling tot een gerichte graaf.

Ook wat de benamingen betreft, zijn er variaties mogelijk : voor de punten spreekt men soms van knooppunten of hoekpunten (Eng : vertices, nodes, points) naargelang de toepassing en voor de lijnen spreekt men ook van zijden of verbindingslijnen (Eng : edges, lines, links).

Wij zullen dus enkel met eindige grafen werken, hoewel in 'de' definitie een oneindig aantal punten en/of lijnen in principe ook zou kunnen toegelaten worden : men spreekt dan van een *oneindige graaf*.

Beschouw bv. de grafiek G_3 : het is duidelijk dat $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ en dat $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. De functie ϕ is gedefinieerd als volgt :

$$\phi(e_1) = \{v_1\}, \phi(e_2) = \{v_1, v_2\}, \phi(e_3) = \{v_1, v_3\}, \phi(e_4) = \{v_2, v_3\}, \phi(e_5) = \{v_2, v_3\}$$

Bij het bestuderen van grafentheorie wordt één zaak vlug duidelijk : er zijn in het begin veel meer definities dan stellingen en resultaten. We geven er nog enkele :

- Definitie 1.3**
1. We noemen punten v en w van een graaf G *buren* als er een lijn e bestaat die v en w verbindt (d.w.z. $\phi(e) = \{v, w\}$); in dit geval zeggen we ook dat de lijn e haar uiteinden v en w verbindt of dat de punten v en w incident zijn met de lijn e .
 2. De graad $d(v)$ van een punt v is het aantal lijnen incident met v (een lus telt hierbij voor twee). De grootste graad die in G voorkomt, noteren we als $\Delta(G)$ en de kleinste graad die in G voorkomt als $\delta(G)$.

Bv. in de graaf G_7 : $d(a) = 4, d(b) = 5, d(c) = 3, d(d) = 4$ en dus $\delta(G_7) = 3$ en $\Delta(G_7) = 5$.

2 ISOMORFE GRAFEN

We moeten benadrukken dat de voorstelling van een graaf en de graaf zelf twee verschillende zaken zijn! Volgens de definitie bestaat een graaf uit twee verzamelingen en een functie. De figuren zijn dus geen grafen maar enkel grafische voorstellingen ervan. Hoewel dergelijke voorstellingen behulpzaam zijn om eigenschappen te begrijpen, moeten we toch voorzichtig zijn bij de interpretatie ervan. Het vervelendste is dat eenzelfde graaf kan voorgesteld worden door twee figuren die er heel verschillend uitzien. Bv. de figuren G_1 en G_2 stellen dezelfde graaf voor en dit is ook het geval voor G_4 en G_5 ! Deze laatste wordt de *wielgraaf* W_7 genoemd: voor elke $n \geq 3$ is er een wielgraaf W_n en deze kan voorgesteld worden door n punten gelegen op een cirkel (vandaar de benaming).

Je kan moeilijk zeggen dat G_6 en G_7 gelijk zijn, want ze hebben een verschillende punten- en lijnenverzameling, maar we noemen deze grafen wel *isomorf*. Als we de punten a, b, c, d van G_7 herbenoemen als 3, 4, 2, 1 in die volgorde, dan kunnen beide beschouwd worden als voorstellingen van dezelfde graaf. We hebben dus volgende

Definitie 2.1 Twee grafen $G = (V, E)$ en $H = (W, F)$ heten *isomorf* als er bijecties $f : V \rightarrow W$ en $g : E \rightarrow F$ bestaan zo dat $\forall e \in E : \phi_G(e) = \{v, w\} \implies \phi_H(g(e)) = \{f(v), f(w)\}$.

De bijecties in het vorige voorbeeld zijn dus als volgt gedefinieerd :

$$f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b \text{ en } g(e_i) = f_i \text{ voor } i = 1, \dots, 8$$

De definitie zorgt er dus voor dat de correspondenties tussen punten en lijnen overeenkomen, m.a.w. als de lijn e van G correspondeert met de lijn $g(e)$ van H , dat de eindpunten dan ook corresponderen (onder de bijectie f). Voor een enkelvoudige graaf volstaat het om de bijectie f tussen de puntenverzamelingen te geven, omdat er hoogstens één zijde is die elk paar punten verbindt : dus, eens f correct gedefinieerd, ligt g automatisch ook vast.

Oefeningen

1. Beschouw de grafen (a),(b),(c) en (d). Welke zijn onderling isomorf?

Antwoord : Het zijn allemaal enkelvoudige grafen met 7 punten en 11 lijnen. Bovendien heeft elke graaf een punt met graad 4, vier punten met graad 3 en twee punten met graad 2. Als we wat nader kijken, dan zien we dat (a) en (b) niet isomorf zijn : in graaf (a) is het punt van graad 4 de buur van twee punten van graad 3, terwijl in graaf (b) het punt van graad 4 de buur is van vier punten van graad 3. Een gelijkaardig argument toont aan dat ook (a) en (d) niet isomorf zijn. Grafen (a) en (c) zijn wel isomorf; de bijectie f tussen de puntenverzamelingen is als volgt gedefinieerd :

$$A_1 \mapsto F_3, B_1 \mapsto E_3, C_1 \mapsto D_3, D_1 \mapsto G_3, E_1 \mapsto C_3, F_1 \mapsto A_3, G_1 \mapsto B_3$$

Aangezien (a) wel isomorf is met (c) en niet met (b) en (d), kunnen (b) en (c) niet isomorf zijn en (c) en (d) ook niet. Blijft nog te controleren of (b) en (d) al dan niet isomorf zijn : dit is niet het geval! In (d) heeft E_4 graad 3 en is buur van twee andere punten van graad 3, terwijl in (b) elk punt van graad 3 buur is van slechts één ander punt van graad 3.

Samengevat zijn dus enkel grafen (a) en (c) isomorf.

2. Hoeveel onderling niet-isomorfe enkelvoudige grafen met vier punten zijn er? En hoeveel met vijf punten?

3 GRAAFKLEURINGEN

Voorbeeld 3.1 *In België zijn er talrijke GSM-zendmasten. Bepaalde zendmasten hebben een zendbereik dat overlapt met andere zendmasten : deze zendmasten moeten dan ook een verschillende frequentie hebben. Anderzijds willen we zo weinig mogelijk frequenties gebruiken! Het geschikte frequentiegebied is nu eenmaal vrij beperkt en net als in vele andere situaties wil men zo zuinig mogelijk met de beschikbare middelen omgaan.*

De zendmasten uit het voorbeeld stellen de punten voor en we verbinden twee punten als de overeenkomstige zendmasten een overlappend zendbereik hebben. Het is ook duidelijk dat de graaf altijd enkelvoudig zal zijn. Het probleem van het vinden van het minimale aantal frequenties is te vertalen naar het zogenaamde *graafkleuringsprobleem* :

Definitie 3.2 Een *kleuring* van de graaf G is een toewijzing van kleuren aan de punten van G zodat

1. elk punt één kleur krijgt;
2. buren verschillende kleuren krijgen

We noemen G k -kleurbaar als G een kleuring heeft met k of minder kleuren. Het graafkleuringsprobleem is het vinden van de minimale k waarvoor G een k -kleuring heeft : deze waarde van k noemen we het *chromatisch getal* van G en noteren we met $\chi(G)$.

Er bestaat tot op heden nog geen efficiënt algoritme om $\chi(G)$ te berekenen : dit is voor grote grafen een zeer ingewikkeld probleem.

We kennen wel zowel bovengrenzen als ondergrenzen voor $\chi(G)$:

Stelling 3.3 Voor iedere graaf G met m lijnen geldt er dat

$$\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$$

Bewijs: Veronderstel dat G een kleuring heeft met $k = \chi(G)$ kleuren. Dan is er ten minste één lijn tussen elke twee kleurklassen : met een kleurklasse bedoelen we een verzameling van alle punten met dezelfde kleur. Anders zou namelijk dezelfde kleur gebruikt kunnen worden voor beide kleurklassen. Daarom geldt dat het aantal lijnen m groter is dan of gelijk aan het aantal paren kleurklassen $C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1)$. Uit $m \geq \frac{1}{2}k(k-1)$ volgt dan dat $k^2 - k - 2m \leq 0$ of dat $k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$. Q.E.D.

Er zijn wel verschillende kleuringsstrategieën ontwikkeld die een kleuring met weinig kleuren opleveren. We bespreken er twee van :

Algoritme 3.4 Zij G een graaf met n punten.

1. We kiezen een punt met graad $\Delta(G)$ en noteren dit punt x_n .
2. We definiëren een nieuwe graaf G_{n-1} die ontstaat uit G door x_n en alle lijnen incident met x_n te verwijderen. We kiezen in G_{n-1} een punt met graad $\Delta(G_{n-1})$ en noteren dit punt x_{n-1} .
3. We herhalen stap 2 voor G_{n-1} en zo ontstaat een graaf G_{n-2} en een punt x_{n-2} .
4. We doen zo verder tot alle punten aan de beurt geweest zijn.

We kleuren nu de punten in de volgorde $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Gevolg 3.5 $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bewijs : Als we dit algoritme volgen, dan heeft elk nieuw te kleuren punt hoogstens $\Delta(G)$ buren die al gekleurd zijn. Als je $\Delta(G) + 1$ kleuren mag gebruiken, is er dus altijd een kleur voor zo'n punt beschikbaar. Q.E.D.

Algoritme 3.6 *Zij G een graaf met n punten.*

1. *We kiezen een punt met graad $\delta(G)$ en noteren dit punt x_1 .*
2. *We definiëren een nieuwe graaf G_2 die ontstaat uit G door x_1 en alle lijnen incident met x_1 te verwijderen. We kiezen in G_2 een punt met graad $\delta(G_2)$ en noteren dit punt x_2 .*
3. *We herhalen stap 2 voor G_2 en zo ontstaat een graaf G_3 en een punt x_3 .*
4. *We doen zo verder tot alle punten aan de beurt geweest zijn.*

We kleuren nu de punten in de volgorde $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Samengevat kunnen we stellen dat bij het eerste algoritme de relatief moeilijke punten, met veel burens, laatst aangepakt worden, terwijl we bij het tweede algoritme de relatief gemakkelijke punten, met weinig burens, eerst kleuren. Soms levert één van de algoritmes een optimale oplossing, $\chi(G)$ dus, maar soms ook niet.

Oefening

Illustreer beide algoritmes op G_8 en op de graaf verbonden aan Fig.1 en controleer of je de optimale oplossing verkrijgt.

We sluiten deze paragraaf af met misschien wel de bekendste toepassing van grafentheorie, het zogenaamde *vierkleurenprobleem*. In 1852 was Francis Guthrie (1831-1899) een student aan de University of London, toen hij opmerkte dat het leek alsof je genoeg had aan vier kleuren om de landen op om het even welke vlakke landkaart (mag ook op een bol of elk ander topologisch equivalent oppervlak) te kleuren zodat landen met een gemeenschappelijke grens steeds een verschillende kleur hebben! Zijn broer Frederick legde dit probleem voor aan Augustus De Morgan (1806-1871) die het aanhaalde in zijn lessen en éénmaal in een boek. Het probleem raakte nochtans slechts bekend toen Sir Arthur Cayley (1821-1895) het besprak in een vergadering van de London Mathematical Society in 1878. Vlak daarna beweerden twee mensen dat zij het vermoeden van Guthrie bewezen hadden. De advocaat (en wiskundige) Alfred Kempe (1849-1922) publiceerde in 1879 zijn bewijs in Nature. Een jaar later kwam wiskundige Peter Guthrie Tait (1831-1901) met een ander bewijs. Tien jaar lang leefden mensen in de gelukzalige veronderstelling dat het vierkleurenprobleem was opgelost. Vooral Kempe ontving veel eer voor zijn werk; hij werd bijvoorbeeld gekozen tot lid van de Royal Society - de Britse academie voor wetenschappen. Maar in 1890 vond Percy Heawood (1861-1955) een cruciale fout in het bewijs van Kempe. En tot overmaat van ramp bleek een jaar later ook het bewijs van Tait niet te kloppen.

Het duurde tot 1976 tot Kenneth Appel (°1932) en Wolfgang Haken (°1928) met een algemeen bewijs kwamen! Dit zorgde voor een enorme controverse in de wereld van de wiskundigen omdat voor de eerste keer in de geschiedenis een computer essentieel was om het bewijs te leveren! Omdat het onmogelijk is om alle landkaarten te bekijken, brachten ze het probleem terug tot een eindig aantal gevallen. Ze gebruikten hierbij zogenaamde onvermijdelijke situaties : dit is een verzameling van situaties (landen die op een bepaalde manier aan elkaar grenzen), waarvan elke willekeurige landkaart er minstens één moet bevatten. Deze verzameling is behoorlijk groot, er zaten 1936 verschillende gevallen in. Het tweede idee dat Appel en Wolfgang gebruikten is dat sommige kaarten te vereenvoudigen zijn.

Deze twee ideeën met elkaar gecombineerd leverden een bewijs op, waar nog wel een heleboel rekenwerk voor nodig was. Uiteindelijk gebruikten Appel en Wolfgang een computer om alle mogelijke gevallen te berekenen; dit kostte meer dan 50 dagen rekentijd. Tot op de dag van vandaag staan sommige wiskundigen nog steeds afwijzend om hun bewijs te aanvaarden omdat het bewijs enkel gecontroleerd kan worden door een andere computer. De details van het bewijs handmatig controleren is in de praktijk onmogelijk.

In de jaren negentig kwamen Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour en Robin Thomas met een nieuw, eenvoudiger bewijs voor de vierkleurenstelling, waarbij "maar" 633 verschillende onvermijdelijke situaties bekeken hoefden te worden. Ook zorgden ze ervoor dat het aantal berekeningen per situatie sterk verminderde. Er was nog steeds een computer nodig om alle mogelijkheden door te rekenen. In 2004 herschreef George Gonthier het bewijs van Robertson en co, zodat hij het computerbewijs kon nakijken met zijn programma Coq. Dit is een computerprogramma dat speciaal gemaakt is om wiskundige bewijzen te controleren. Gonthier bevestigde, dat het bewijs van Robertson en co klopt. Nu moeten wiskundigen alleen nog maar het programma Coq vertrouwen om te kunnen geloven dat het vierkleurenprobleem echt is opgelost...

4 NETWERKEN

Voorbeeld 4.1 *Een telefoonmaatschappij wil de grote telefooncentrales via snelle glasvezelkabels met elkaar verbinden. Elke centrale moet met elke andere centrale informatie kunnen uitwisselen, eventueel via tussenkomst van andere centrales. Je weet bovendien van elke potentiële verbinding wat de kosten zijn. Hoe leg je een netwerk tegen minimale kosten?*

Bij dit soort toepassingen zullen we opnieuw uitsluitend werken met enkelvoudige grafen : er moet immers tussen twee centrales hoogstens één verbinding gemaakt worden. De grafen zullen ook *gewogen* zijn, d.w.z. dat elke lijn e een bepaald *gewicht* $w(e)$ heeft : dit is een getal, in bovenstaande voorbeeld de kostprijs van de verbinding. Een gewogen graaf wordt ook een *netwerk* genoemd. Het *gewicht van een graaf* is dan de som van de gewichten van alle lijnen van de graaf. We zullen hiervoor het algoritme van Kruskal gebruiken, maar hebben eerst nog enkele nieuwe begrippen nodig.

Definitie 4.2 *Een pad tussen twee punten van een graaf G is een opeenvolging van punten van G en lijnen van G tussen opeenvolgende punten, waarin elk punt hoogstens één keer voorkomt. We noteren een pad door middel van de rij opeenvolgende punten. Een cykel in een graaf G bestaat uit een pad $u \dots v$ in G , bestaande uit minstens drie punten, met eraan toegevoegd de lijn vu van G . We noteren het pad dan als $u \dots vu$.*

Voorbeeld 4.3 *In graaf (c) is $A_3D_3E_3F_3C_3$ een pad en is $D_3E_3F_3C_3A_3D_3$ een cykel. Let wel : bv. $A_3D_3E_3F_3G_3D_3A_3$ is geen cykel! (Waarom?)*

Definitie 4.4 *Een graaf G heet samenhangend als tussen elke twee verschillende punten van G een pad bestaat in G .*

Oefening Hoeveel van de grafen met vier punten uit oef.2 van Hst.2 zijn samenhangend? En met vijf punten?

Definitie 4.5 Een deelgraaf $H = (W, F)$ van een graaf $G = (V, E)$ is een graaf met $W \subseteq V$ en $F \subseteq E$. We noteren $H \subseteq G$. Een deelgraaf $H = (W, F)$ van een graaf $G = (V, E)$ is een opspannende deelgraaf als $W = V$.

Oefening Geef drie opspannende deelgrafen van G_6 .

Definitie 4.6 Een boom is een samenhangende graaf zonder cykels.

Wat houdt dit nu juist in? 'Samenhangend' betekent dat je vanuit elk punt naar elk ander punt kan gaan via de lijnen en punten van de graaf. 'Zonder cykels' betekent dat je geen rondjes kan lopen in de graaf. Als je vanaf een bepaald punt een pad neemt in de boom, kun je niet meer terug bij dit punt uitkomen.

Oefening Teken alle onderling niet-isomorfe bomen met

1. drie punten
2. vier punten
3. vijf punten
4. zes punten

Wat gebeurt er als je uit een boom een lijn weglaat? Dan is de verkregen graaf niet meer samenhangend! De graaf valt dan namelijk uiteen in twee stukken. Om even terug te keren op het inleidende voorbeeld : aangezien elke centrale met elke andere centrale informatie moet kunnen uitwisselen, is het duidelijk dat de bijhorende graaf samenhangend moet zijn. Het is duidelijk dat het netwerk geen cykel mag bevatten want anders heb je geen optimale oplossing. De optimale oplossing zal dus een boom zijn. Aangezien het netwerk bovendien **alle** centrales moet bevatten, spreken we van een opspannende boom. De definitie hiervan is een gevolg van de vorige definities :

Definitie 4.7 Een opspannende boom van een samenhangende graaf G is een deelgraaf van G die

1. alle punten van G bevat;
2. samenhangend is;
3. geen cykels bevat.

In het inleidende voorbeeld zoeken we dus eigenlijk een opspannende boom maar ook met zo laag mogelijke kosten. Dit noemen we een

Definitie 4.8 Een minimale opspannende boom van een samenhangende gewogen graaf G is een opspannende boom van G waarvoor het totale gewicht van alle lijnen zo klein mogelijk is.

Hoe we zo'n minimale opspannende boom kunnen vinden, zien we in het befaamde

Algoritme van Kruskal 4.9

Gegeven is een samenhangend netwerk G met minstens drie punten. Maak een graaf H met dezelfde punten maar nog geen lijnen.

1. Voeg een lijn van G met zo laag mogelijk gewicht toe aan H
2. Kies een lijn van G die nog niet in H zit zodat het gewicht van die lijn zo laag mogelijk is en zodat de graaf die uit H ontstaat door die lijn aan H toe te voegen geen cykel bevat.
3. Stop als in stap 2 geen nieuwe lijn meer gekozen kan worden.

De aldus verkregen deelgraaf H is dan een minimale opspannende boom van G .

Oefening

1. Tussen zeven computers, voorgesteld in graaf G_9 moet een netwerk aangelegd worden. De aanlegkosten van de verschillende verbindingen staan vermeld langs de lijnen van G_9 in duizenden euro. De andere mogelijke lijnen worden niet in beschouwing genomen. Bepaal nu m.b.v. het algoritme van Kruskal een goedkoopste netwerk.
2. Gebruik het algoritme van Kruskal om een minimale opspannende boom te vinden voor de graaf G_{10} .

5 KORTSTE PADEN

In dit hoofdstuk gaan we op zoek naar het kortste pad tussen twee punten van een gewogen graaf : we zoeken dus een pad tussen die twee punten zodat de som van de gewichten van de lijnen van dit pad minimaal is. In toepassingen kan het bv. gaan over het plannen van een reis, het zoeken van de goedkoopste treinroute tussen twee steden of het zoeken van een zo snel mogelijke weg op internet tussen twee computers.

Hiervoor gebruiken we **het algoritme van Dijkstra** : dit algoritme is genoemd naar de Nederlander Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002). Om het kortste pad te zoeken tussen x en y kiezen we een vertrekpunt, bv. x . Vervolgens krijgt elk punt $p \neq x$ twee labels : het eerste $d(p)$ geeft de tot dan toe berekende kortste afstand van p tot x weer en het tweede $v(p)$ geeft de directe voorganger van het punt p op de tot dan toe berekende benadering van het kortste pad van x naar p . In het begin krijgt x labels $d(x) = 0$ en $v(x) = x$ en krijgt elk punt $p \neq x$ label $d(p) = \infty$ en wordt $v(p)$ nog niet ingevuld.

Het algoritme gaat nu als volgt :

1. Begin : stel $d(x) = 0$ en $v(x) = x$ en $d(p) = \infty$ voor alle $p \neq x$. Zet x in de lijst 'afgehandelde punten'.
2. (a) Zij u het laatste afgehandelde punt. Vervang voor elk niet-afgehandeld punt p het huidige label $d(p)$ door $\min(d(p), d(u) + w(up))$ en stel $v(p) = u$ enkel als $d(u) + w(up) < d(p)$.

- (b) Kies nu van alle niet-afgehandelde punten het punt met de laagste waarde voor $d(p)$ en voeg dit punt toe aan de afgehandelde punten.

3. Herhaal stap 2 tot alle punten afgehandeld zijn.

Voorbeeld 5.1 We illustreren het algoritme van Dijkstra op de graaf G_{21} .

We verkrijgen volgende tabel :

	z	a	b	c	d	e	f	afgehandeld
Stap	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	
1	$0, z$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	z
2		$5, z$	$\infty, -$	$4, z$	$\infty, -$	$2, z$	$\infty, -$	z, e
3		$5, z$	$\infty, -$	$3, e$	$\infty, -$		$3, e$	z, e, c
4		$4, c$	$8, c$		$\infty, -$		$3, e$	z, e, c, f
5		$4, c$	$8, c$		$6, f$			z, e, c, f, a
6			$8, c$		$6, f$			z, e, c, f, a, d
7			$7, d$					z, e, c, f, a, d, b

Uit de tabel lezen we bv. af dat de afstand tussen z en b in het netwerk 7 is; een kortste pad tussen z en b kunnen we ook uit de tabel aflezen : de voorganger van b is d , van d is f , van f is e , en van e is z . Het kortste pad is dus $zefdb$ met totale afstand $2 + 1 + 3 + 1 = 7$. Voor de andere punten gaat dit op dezelfde manier.

Oefening.

Pas het algoritme van Dijkstra toe op de graaf G_{22} , uitgaande van het punt z' (maak een tabel). Leid hieruit de kortste paden van z' naar de andere punten.

Mogelijke oplossing :

	z'	a'	b'	c'	d'	e'	f'	g'	afgehandeld
Stap	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	d, v	
1	$0, z'$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	z'
2		$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$3, z'$	$1, z'$	$1, z'$	z', g'
3		$\infty, -$	$\infty, -$	$\infty, -$	$10, g'$	$3, z'$	$1, z'$		z, g', f'
4		$4, f'$	$6, f'$	$\infty, -$	$10, f'$	$3, z'$			z', g', f', e'
5		$4, f'$	$6, f'$	$12, e'$	$6, e'$				z', g', f', e', a'
6			$6, f'$	$12, e'$	$6, e'$				z', g', f', e', a', d'
7			$6, f'$	$10, d'$					$z', g', f', e', a', d', b'$
8				$10, d'$					$z', g', f', e', a', d', b', c'$

De kortste paden zijn : $z'f'a'$, $z'f'b'$, $z'e'd'c'$, $z'e'd'$, $z'e'$, $z'f'$ en $z'g'$.

6 EULERIAANSE GRAFEN

Oefeningen

1. Probeer de grafen G_{11} , G_{12} en G_{13} te tekenen zonder je balpen op te heffen en zonder twee keer dezelfde lijn te tekenen? Kun je dit ook doen zodat je begint en eindigt in hetzelfde punt?
2. Kun je het "Königsberg Bridge Problem" oplossen?

Gerelateerd aan deze oefeningen is de volgende

Definitie 6.1 *Een circuit in een graaf G is een opeenvolging van aaneensluitende onderling verschillende lijnen zodat het eerste punt en het laatste punt gelijk zijn.*

Vraag : Wat is het verschil tussen een circuit en een cykel? (zie definitie 4.2)

Definitie 6.2 *Een Eulercircuit in een graaf G is een circuit dat elke lijn van G (juist 1 keer) bevat. Een graaf G heet Euleriaans als en slechts als G minstens één Eulercircuit heeft.*

In voorgaande oefeningen werd dus eigenlijk gevraagd of de grafen Euleriaans waren. We hebben nu volgende

Stelling 6.3 *Een samenhangende graaf is Euleriaans als en slechts als elk punt van de graaf even graad heeft.*

Bewijs : We bewijzen eerst $\Rightarrow$: Als G samenhangend is en een Eulercircuit heeft, dan volgt uit bovenstaande definities dat dit Eulercircuit alle punten van G bevat : er zijn namelijk geen 'losse' punten in een samenhangende graaf en het circuit bevat alle lijnen, dus gaat het ook door alle punten. Neem nu een willekeurig punt van G : telkens als het Eulercircuit door dat punt gaat, neemt de graad van dat punt met 2 toe. Daar elke lijn juist één keer voorkomt in het Eulercircuit, heeft elk punt dus even graad.

Nu bewijzen we $\Leftarrow$ door inductie op het aantal lijnen van G :

- Basisstap : aangezien elk punt even graad heeft, moet er zeker meer dan één lijn zijn : in geval G twee lijnen heeft (en elk punt dus even graad heeft), is G Euleriaans (teken!).
- Inductiestap : Kies een willekeurig punt v van G : daar elk punt even graad heeft en daar G samenhangend is, kunnen we een circuit c vinden dat begint en eindigt in v . Nu zijn er twee mogelijkheden :
 - ofwel bevat c elke lijn van G en dan is de stelling bewezen;
 - ofwel bevat c niet elke lijn van G : in dat geval verwijderen we alle lijnen van c en verkrijgen we een deelgraaf G' met minder lijnen dan G . Nu zijn er opnieuw twee mogelijkheden :
 - * ofwel is G' samenhangend : in dat geval heeft G' door de inductiehypothese een Eulercircuit c' ; door c en c' samen te voegen verkrijgen we een Eulercircuit voor G ;

* ofwel is G' niet samenhangend : in dat geval bevat elke samenhangende component van G door de inductiehypothese een Eulercircuit. Door al deze circuits samen te voegen met c verkrijgen we een Eulercircuit voor G . Q.E.D.

Voorbeelden 6.4

1. Wat kun je zeggen over het Königsberg Bridge Problem?
2. K_n is de complete graaf met n punten. We tekenen K_3 , K_4 en K_5 :

K_n is Euleriaans als en slechts als

Teken een Eulercircuit in K_5 (gebruik de methode uit het tweede deel van voorgaand bewijs).

3. Een bipartiete graaf is een graaf zodat er een partitie $\{V_1, V_2\}$ van de puntenverzameling V bestaat zodat elke lijn van G een punt van V_1 verbindt met een punt van V_2 .

Een complete bipartiete graaf is een bipartiete graaf zodat er een unieke lijn bestaat tussen elk punt van V_1 en elk punt van V_2 . Als $\#(V_1) = n$ en $\#(V_2) = m$, dan noteren we deze graaf met $K_{n,m}$. Teken $K_{3,3}$:

Toon dat $K_{4,4}$ eigenlijk de graaf G_{14} is.

Vul aan : $K_{n,m}$ is Euleriaans als . . .

7 HAMILTONIAANSE GRAFEN

Bovenstaande naam is afgeleid van de geniale Dubliner Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Naast grafen vond hij in 1843 ook de quaternionen en was hij actief in de fysica en de astronomie. Op 7-jarige leeftijd kende hij reeds Hebreeuws, op zijn 13 jaar kende hij reeds evenveel talen als zijn leeftijd waaronder Frans, Italiaans, Arabisch, Syrisch en Sanskriet alsook enkele Indische talen.

Definitie 7.1 *Een Hamiltoncykel in een graaf G is een cykel die door elk punt van G (juist één keer) passeert.*

Een graaf G heet Hamiltoniaans als G minstens één Hamiltoncykel heeft.

Probeer een Hamiltoncykel te vinden in $K_{3,3}$, K_5 en $K_{4,4}$.

Na meer dan 100 jaar is er nog steeds geen karakterizatie (nodige en voldoende voorwaarde) van Hamiltoniaanse grafen gekend. Een nodige voorwaarde is zeker 'samenhangend' en een voldoende voorwaarde is "voldoende zijden hebben". Er is voorlopig enkel

Stelling 7.2 *Als G een samenhangende enkelvoudige graaf is met $n \geq 3$ punten en als voor elk punt v geldt dat $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, dan is G Hamiltoniaans.*

We laten het bewijs van deze stelling achterwege. Merk op dat de stelling een voldoende maar geen nodige voorwaarde geeft : dat de voorwaarde niet nodig is, is te zien aan de dodecaëdrale graaf (zie volgend hoofdstuk).

We eindigen dit hoofdstuk met nog een bekend probleem uit grafentheorie :

The Traveling Salesman Problem (TSP) 7.3

In 1956 verscheen het volgende artikel :

'On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem', Proceedings of the American Mathematical Society 7, 48-50,

waarmee Joseph B. Kruskal (van het algoritme ook) bekend is geworden. Hij is thans emeritus hoogleraar en nog steeds werkzaam bij Bell Labs. Voor meer informatie kan je zijn homepage bekijken op <http://cm.bell-labs.com/cm/ms/departments/sia/kruskal/index.html>

Het traveling salesman problem (TSP) is één van de bekendste problemen in de computerwetenschap en operationeel onderzoek. Het kan als volgt worden geformuleerd:

"Als er n steden gegeven zijn die een handelsreiziger moet bezoeken, samen met de afstand tussen ieder paar van deze steden, vind dan de kortste weg die kan worden gebruikt, waarbij iedere stad precies éénmaal wordt bezocht en zodat hij eindigt in de stad waar hij begonnen is."

Bovenstaand probleem kan als volgt door middel van een gewogen graaf voorgesteld worden: elke stad is een punt en elke weg die twee steden verbindt is een lijn die de overeenkomstige punten verbindt. Het gewicht van de lijn is dan de afstand tussen de steden langs die weg. We gaan er uiteraard van uit dat de graaf samenhangend is, anders is het probleem onoplosbaar. Het is gebruikelijk om het probleem nog in een lichtjes andere graaf-theoretische vorm weer te

geven : er wordt ook nog verondersteld dat de graaf compleet is (zie voorbeeld 2 in paragraaf 5.4). Bovendien veronderstellen we dat het gewicht van een lijn overeenkomt met de **kortste** afstand tussen de betreffende steden. Het probleem kan dan als volgt geformuleerd worden :

”Gegeven een samenhangende gewogen complete graaf, construeer een Hamiltoncykel met minimaal gewicht, een minimale Hamiltoncykel dus.”

Merk op dat uit stelling 6.2 volgt dat elke complete graaf met minstens 3 punten een Hamiltoncykel heeft (heel gemakkelijk construeerbaar trouwens!). Daar onze grafen eindig zijn, zijn er slechts eindig veel Hamiltoncyclen en moet er minstens één minimaal zijn.

Op 20 april 2001 kondigden David Applegate, Robert Bixby, Vasek Chvatal en William Cook de oplossing van het TSP aan voor 15112 steden in Duitsland. Dat was op dat ogenblik het grootste TSP ooit opgelost. De optimale oplossing heeft lengte 1573084 in de eenheden die gebruikt worden in het TSPLIB; dit komt overeen met een trip van ongeveer 66000 km doorheen Duitsland. TSPLIB is een bibliotheek van opzoekingen en artikels i.v.m. het TSP (en gerelateerde problemen). Je vindt het op <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>

De berekening gebeurde op een netwerk van 110 processoren aan Rice University en Princeton University. De in totaal gebruikte computertijd was 22,6 jaar, als je herschaalt op een Compaq EV6 Alpha processor aan 500 MHz.

In mei 2004 is de oplossing voor het handelsreizigersprobleem gevonden voor 24978 plaatsen in Zweden. De afstand bedraagt ongeveer 72500 kilometer.

Het huidige record is een ronde van 85900 steden die ontstond uit een chip-design toepassing in Bell Laboratories in 2006; de optimale oplossing heeft lengte 142382641.

Er is een eenvoudig algoritme, het zogenaamde *dichtste buur algoritme* : je start in een willekeurig punt en kiest een lijn incident met dat punt en met een zo klein mogelijk gewicht. Je komt zo in een ander punt en herhaalt hetzelfde procédé. Als we alle punten gehad hebben, keren we terug naar het startpunt via de unieke lijn incident met beide punten. Dit is echter een nogal zwak algoritme in de volgende betekenis : hoewel het soms een minimale Hamiltoncykel voortbrengt, zal het over het algemeen een Hamiltoncykel met een (veel) groter gewicht produceren. Eigenlijk is het resultaat zo slecht als je je maar kan inbeelden : voor elk natuurlijk getal $k \neq 0$ bestaat er namelijk een graaf waarvoor dit algoritme een Hamiltoncykel produceert met gewicht k maal het minimale gewicht!

8 DE PLATONISCHE LICHAMEN

8.1 Regelmatige veelhoeken

In het Euclidische vlak bestaat er voor elk natuurlijk getal $n \geq 3$ een convexe regelmatige n -hoek met precies n zijden : de n zijden zijn even lang, de n hoeken zijn even groot en de regelmatige n -hoek is ingeschreven in een cirkel.

Wiskundigen zijn van in de oudheid reeds gefascineerd door het probleem van de *constructie* van regelmatige veelhoeken m.b.v. *passer en lineaal*. De allereerste stelling in boek I van de *Elementen* van *Euclides* (ong. 300 v.C.), onmiddellijk na de axioma's en definities luidt :

”De regelmatige (=gelijkzijdige) driehoek is construeerbaar m.b.v. passer en lineaal.”

Boek IV is bovendien volledig gewijd aan dergelijke constructies. Probeer zelf een dergelijke constructie te maken voor een willekeurige waarde van n .

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), de Princeps Mathematicorum, was in 1796 nog geen 19 jaar oud toen hij er in slaagde een regelmatige 17-hoek te construeren met passer en lineaal. Dit was de eerste nieuwe constructie sedert de Griekse Oudheid! Op zijn standbeeld in Braunschweig prijkt dan ook een dergelijke 17-hoek. In zijn Opus Magnum, de *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) komt Gauss m.b.v. de priemgetallen van Fermat tot zijn prachtige stelling waarin hij bewijst welke regelmatige veelhoeken construeerbaar zijn: voor $n = 7$ en $n = 9$ bijvoorbeeld is dit onmogelijk.

8.2 Regelmatige veelvlakken

Laten we nu overstappen naar de driedimensionale ruimte. Een convex regelmatig n -vlak is een convex veelvlak waarvan de n zijvlakken twee aan twee congruente convexe regelmatige veelhoeken zijn. Zo'n regelmatig veelvlak is ingeschreven in een sfeer.

Terwijl er in het vlak voor elke $n \geq 3$ een convexe regelmatige n -hoek bestaat, is dit in de ruimte voor convexe regelmatige n -vlakken niet het geval!

Stelling.

Er bestaan maar vijf convexe regelmatige veelvlakken.

MEETKUNDIG BEWIJS : Zij gegeven een convex regelmatig veelvlak : elke top T is het hoekpunt van een bepaald aantal, zeg m , regelmatige veelhoeken. De som van de hoeken in T is zeker kleiner dan 360° .

- 1e mogelijkheid : deze veelhoeken zijn gelijkzijdige driehoeken.

Elke hoek meet dan 60° . In elke top kunnen bijgevolg samenkomen :

- ofwel 3 gelijkzijdige driehoeken ($3 \times 60 = 180 < 360$)
- ofwel 4 gelijkzijdige driehoeken ($4 \times 60 = 240 < 360$)
- ofwel 5 gelijkzijdige driehoeken ($5 \times 60 = 300 < 360$)

Zo verkrijgen we volgende drie regelmatige veelvlakken :

- het regelmatig viervlak of de *tetraëder*;
- het regelmatig achthoek of de *octaëder*;
- het regelmatig twintigvlak of de *icosaëder*.

- 2e mogelijkheid : deze veelhoeken zijn vierkanten.

Elke hoek van een vierkant meet 90° . In elke top kunnen en moeten bijgevolg 3 vierkanten samenkomen ($3 \times 90 = 270 < 360$). Zo verkrijgen we nog een regelmatig veelvlak, nl. de *kubus*.

- 3e mogelijkheid : deze veelhoeken zijn regelmatige vijfhoeken.

Elke hoek van een regelmatige vijfhoek meet 108° . In elke top kunnen en moeten bijgevolg 3 regelmatige vijfhoeken samenkomen ($3 \times 108 = 324 < 360$). Zo verkrijgen we nog een regelmatig veelvlak, nl. het regelmatig twaalfvlak of de *dodecaëder*.

Omdat elke hoek van een regelmatige zeshoekmeet en $3 \times \dots\dots\dots$, kunnen de zijvlakken van een regelmatig veelvlak geen regelmatige zeshoeken, zevenhoeken, achthoeken, ... zijn. Q.E.D.

Deze regelmatige veelvlakken worden de *platonische lichamen* genoemd naar de Griekse wijsgeer Plato (ca. 427-347 v.C.) die er een bijzondere betekenis aan toekende : aan het viervlak, achthoek, twintigvlak en de kubus associeerde hij de primaire elementen van alle materiële lichamen, resp. het vuur, de lucht, het water en de aarde. Het twaalfvlak tenslotte werd geassocieerd met het omhullend heelal, de ether.

Doorheen de geschiedenis spelen deze platonische lichamen een grote rol; we zien dit ook bij Johannes Kepler (1571-1630). Kepler zocht een relatie tussen de planeetbanen en de platonische lichamen. Volgens de copernicaanse sterrenkunde waren er zes planeten, nl. Mercurius, Venus, de Aarde, Mars, Jupiter en Saturnus, waarvan de banen geregeld worden door het draaien van onzichtbare sferen. Maar waarom waren er maar zes planeten? Kepler kwam tot een verklaring in zijn *Mysterium Cosmographicum* (1596) : de vijf platonische lichamen zijn in elkaar genesteld zodanig dat er zes concentrische sferen ontstaan die overeenkomen met de banen van de zes toen gekende planeten. Kepler schrijft letterlijk: "Nu hebt U de verklaring voor het aantal planeten." Helaas voor Kepler ontdekte William Herschel (1738-1822) op 13 maart 1781 de planeet Uranus, de eerste planeet die sinds de Oudheid ontdekt werd.

9 PLANAIRE GRAFEN EN PLATONISCHE LICHAMEN

De oorsprong van dit eerste begrip ligt in het zogenaamde '*Three Utilities Problem*' : drie huizen moeten voorzien worden van gas, electriciteit en water. De vraag is of de dat mogelijk is zonder dat de leidingen elkaar kruisen.

De graaf die hiermee overeenkomt is de complete bipartiete graaf $K_{3,3}$, waarbij de ene drie punten de huizen en de andere drie punten de drie centrales voorstellen. De lijnen stellen uiteraard de leidingen voor. De vraag is dus eigenlijk of we de graaf zodanig kunnen voorstellen dat de lijnen elkaar niet snijden, behalve in de zes punten van de graaf.

Definitie 9.1 *Een graaf is planair indien hij kan voorgesteld worden zodat alle lijnen enkel snijden in punten van de graaf.*

Je kan na wat proberen snel inzien dat $K_{3,3}$ niet planair is. De vraag is echter hoe je dit kan zien bij ingewikkeldere grafen. Maar vooraleer hierop te antwoorden, geven we eerst nog wat voorbeelden van planaire grafen die te maken hebben met de platonische lichamen.

Voorbeelden 9.2 *Aan elk platonisch lichaam kan een planaire graaf geassocieerd worden door perspectiefprojectie op een vlak. Probeer dit zelf en ga na dat al deze grafen Hamiltoniaans zijn (teken telkens een Hamiltoncykel). Eén van deze grafen, nl. de dodecaëdrale graaf, illustreert de opmerking die we na stelling 6.2 gemaakt hebben.*

Formule van Euler (1750) 9.3

Elke samenhangende planaire graaf verdeelt het vlak in een aantal gebieden, zijvlakken genaamd. Bijvoorbeeld K_3 verdeelt het vlak in twee gebieden, een begrensd en een onbegrensd; K_4 verdeelt het vlak in ... gebieden, waarvan ... begrensde en één onbegrensd. Nu blijkt er een eenvoudige verband te zijn tussen het aantal punten (genoteerd v van vertices), het aantal lijnen (genoteerd e van edges) en het aantal zijvlakken (genoteerd f van faces) van een dergelijke graaf. Laat ons daartoe volgende tabel aanvullen :

Graaf	v	e	f
K_3			
elke boom			
tetraëder (K_4)			
kubus			
octaëder			
dodecaëder			
icosaëder			

Welk verband merk je op?

Men noemt dit de *Eulerkarakteristiek* van de graaf of van het corresponderende veelvlak.

Deze formule is algemeen geldig voor elke samenhangende planaire graaf G en wordt de formule van Euler genoemd. We bewijzen deze formule door inductie op het aantal zijden.

- BASISSTAP : als G 0 lijnen heeft (en dus 1 punt), dan is $v = \dots$, $e = \dots$ en $f = \dots$: de formule klopt dus.
- INDUCTIESTAP : we veronderstellen dat de formule geldt voor alle samenhangende planaire grafen met e lijnen; beschouw zo'n graaf G . We voegen nu aan G één lijn toe : deze lijn is omvat in één van de f gegeven zijvlakken. Omdat de graaf samenhangend is, hebben we twee mogelijkheden :
 - 1e mogelijkheid : de nieuwe lijn verbindt twee van de punten van G .
Wat gebeurt er dan met v, e en f ? Blijft de formule dan geldig?
 - 2de mogelijkheid : de nieuwe lijn verbindt een punt van G met een nieuw punt.
Wat gebeurt er dan met v, e en f ? Blijft de formule dan geldig?

Q.E.D.

Eigenschap 9.4 *Dualiteit*

In de tabel op de vorige bladzijde merken we nog een eigenaardigheid op : vergelijk de rijen van de kubus en de octaëder alsook de rijen van de dodecaëder en de icoesaëder. Wat stel je vast?

Dit resultaat heeft te maken met het feit dat de kubus en de octaëder elkaars *duale* zijn : als we de middens van de aanliggende zijvlakken van de kubus verbinden, dan verkrijgen we een octaëder, en omgekeerd. Deze dualiteit werd het eerst opgemerkt in 1725 door de Fransman J. de Mairan (1678-1771).

Zo zijn ook de dodecaëder en de icoesaëder elkaars *duale* : als we de middens van de aanliggende zijvlakken van de dodecaëder verbinden, dan verkrijgen we een icoesaëder, en omgekeerd. Deze dualiteit werd het eerst opgemerkt in 1813 door de Zwitser S. Lhuillier (1750-1840).

De tetraëder is *autoduaal*, d.w.z. dual met zichzelf.

We keren nu terug naar onze oorspronkelijke probleemstelling : hoe te zien of een graaf al dan niet planair is. We hebben reeds aangehaald dat $K_{3,3}$ niet planair is. Wat met K_5 ? Probeer eens!

We eindigen met een beroemde stelling die aangeeft dat bovenstaande twee voorbeelden in zekere zin de enige manieren zijn waarop een graaf niet planair kan zijn. Eerst nog volgende

Definitie 9.5 *Twee grafen zijn homeomorf als de ene graaf uit de andere kan verkregen worden door punten van graad 2 toe te voegen aan of te schrappen uit haar lijnen.*

Je kan nagaan dat de zeven grafen op het blad 'Homeomorfe grafen' inderdaad homeomorf zijn. De eenvoudigste werkwijze om te zien of twee grafen homeomorf zijn is als volgt : laat bij beide grafen zoveel mogelijk punten van graad 2 weg en ga na of de resulterende grafen isomorf zijn.

Oefening.

1. Ga na dat de wielgraaf W_n en de complete graaf K_3 homeomorf zijn.
2. Zijn de grafen G_{15} en G_{16} homeomorf?
3. Zijn de grafen G_{17} en G_{18} homeomorf?

Stelling 9.6 van Kuratowski (1930, Pol)

Een graaf is planair als en slechts als de graaf geen deelgraaf bevat die homeomorf is met K_5 of $K_{3,3}$.

Het bewijs van deze stelling is te lang en te ingewikkeld om het hier weer te geven.

Oefening. Ga na of de grafen G_{19} en G_{20} planair zijn.