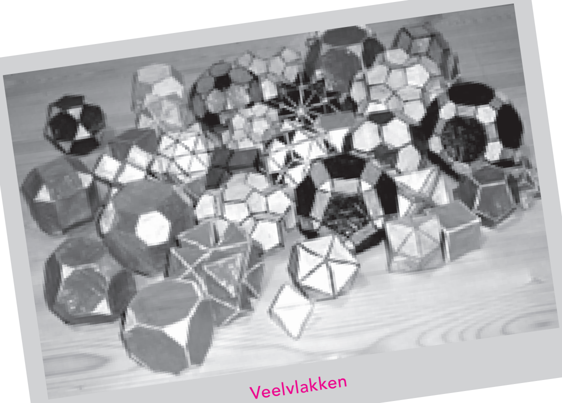
door **Marco Swaen**

De wiskunde van Marleen Kooiman



Veelvlakken

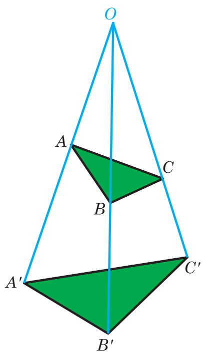
Marleen bij de presentatie van haar werkstuk

Op veel scholen is het een jaarlijks terugkerend evenement geworden: leerlingen presenteren hun profielwerkstukken voor algemeen publiek. Zo ook op het Bonhoeffercollege in Castricum, waar dit jaar Marleen Kooiman indruk maakte met haar scriptie *De stelling van Desargues in breder perspectief*. De onderwerpkeuze was ongebruikelijk, de stelling van Desargues zul je vergeefs in schoolboeken zoeken. Indrukwekkend was vooral wat Marleen met het onderwerp deed. In plaats van te bewerken wat zij in boeken en op websites vond, stelde Marleen zich ten doel de meer dan driehonderd jaar oude stelling aanzienlijk algemener te maken.

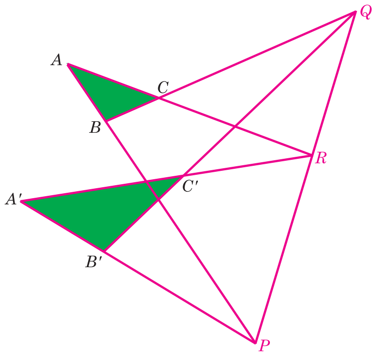
Het was niet de eerste keer dat Marleen zelf aan het onderzoeken sloeg. Oplettende lezers kennen haar naam nog van het artikel *Nieuwe platonische lichamen*, dat vorig jaar (juni 2005) in *Pythagoras* verscheen. De geschiedenis achter dat artikel vertelt zij zelf: ‘Met veelvlakken was ik al eerder bezig. Al op de basisschool en in de brugklas sneed ik in gedachten stukken van een kubus af en maakte daar uitslagen van. Later ben ik wat meer gaan ordenen en gaan bewaren wat ik maakte.’

In de zomer van 2004 las Marleen in *Pythagoras* (juninummer 2004) hoe Popke Bakker de regelmatige veelvlakken in een tabel zette waarin echter nog een aantal intrigerende open gaten prijkten. ‘Ik verwachtte dat ik met mijn methode gemakkelijk zou kunnen aantonen dat de gaten in zijn tabel ook daadwerkelijk leeg waren. Maar tot mijn verrassing waren ze *niet* leeg.’

Na de vondst van twee nieuwe regelmatige veelvlakken greep Marleen het profielwerkstuk aan om zich te verdiepen in een ander onderwerp uit de meetkunde. Ze kwam terecht bij de stelling van Desargues, die gaat over driehoeken in het platte vlak, zoals we op de volgende bladzijden zullen uitleggen. Marleen bedacht hoe je de stelling kunt uitbreiden naar figuren met meer hoekpunten en in hogere dimensies. Om haar bewijzen sluitend te krijgen, leerde zij zichzelf de methode van volledige inductie aan. En aldus plaatste zij de stelling van Desargues in een veel breder perspectief.



Figuur 1a



Figuur 1b

De stelling van Desargues

In de figuren 1a en 1b zie je twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ die op een bijzondere manier ten opzichte van elkaar liggen. Links is het zo dat de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden (dus AA', BB' en CC') door één punt gaan. Rechts daarentegen is het zo dat de snijpunten van overeenkomstige zijden (verlengd) op één lijn liggen.

De stelling van Desargues zegt: als twee driehoeken liggen zoals in figuur 1a, dan liggen ze meteen ook zoals in figuur 1b. Oftewel: als van twee driehoeken de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, liggen de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn.

Het omgekeerde van de stelling is ook waar: liggen driehoeken zoals in figuur 1b, dan liggen ze ook zoals in figuur 1a.

Projectieve meetkunde

In de stelling van Desargues spelen afmetingen van hoeken, lijnstukken, of vlakdelen geen rol. Het is een stelling uit een gebied van de meetkunde waarin het alleen gaat om rechte lijnen en hun snijpunten: de *projectieve meetkunde*.

Op school heb je geleerd dat in het platte vlak twee lijnen elkaar snijden óf evenwijdig zijn. Lopen twee lijnen bijna evenwijdig dan is hun snijpunt heel ver weg, je zou daarom kunnen stellen: evenwijdige lijnen hebben wel een snijpunt, maar dat ligt oneindig ver weg. Dat klinkt als een woordspelletje, maar in een perspectieftekening zie je die snijpunten van evenwijdige lijnen gewoon liggen op de horizon.

Dualiteit

Accepteer je eenmaal dat ook evenwijdige lijnen een snijpunt hebben, dan ontstaat er een wonderlijke symmetrie tussen punten en lijnen:

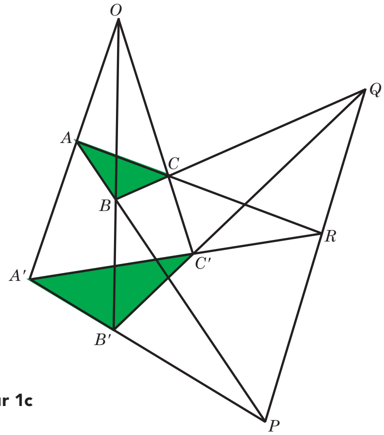
- twee lijnen hebben altijd één punt gemeen (hun snijpunt);
- twee punten hebben altijd één lijn gemeen (de lijn waar zij samen op liggen).

Deze symmetrie van punten en lijnen heet *dualiteit*. Elke figuur in de projectieve meetkunde heeft een duale figuur. De duale figuur van een punt is een lijn. De duale figuur van 'drie punten op een lijn' is 'drie lijnen door een punt'.

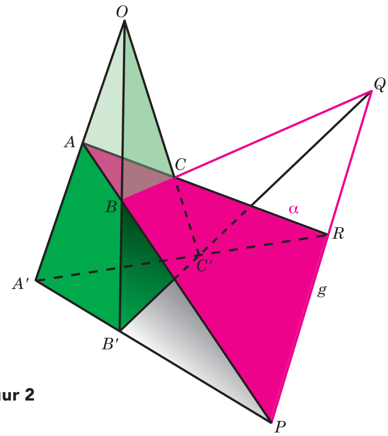
Een driehoek is een figuur die bestaat uit drie punten en de drie lijnen die die punten paarsgewijs verbinden. De duale figuur van een driehoek zou je een *driezijde* kunnen noemen: drie lijnen abc en de drie snijpunten die ontstaan als je steeds twee zijden snijdt.

Bij elke uitspraak hoort een duale uitspraak, waarin de rol van punten en lijnen omgewisseld is. Laten we eens kijken wat de duale stelling van Desargues is.

'Als van twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ de lijnen die overeenkomstige hoekpunten verbinden door één punt gaan, dan liggen de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn' wordt 'als van driezijden abc en $a'b'c'$ de snijpunten van overeenkomstige zijden op één lijn liggen, dan gaan de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt.' Bekijk je dit goed, dan zie je dat dit niets anders is dan de omgekeerde stelling.



Figuur 1c



Figuur 2

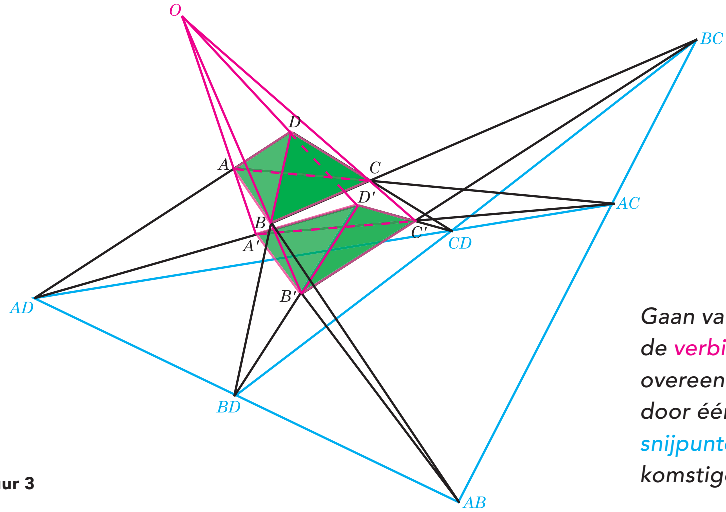
Zien is bewijzen

Een andere verrassing aan de stelling van Desargues is dat je hem kunt bewijzen door er alleen maar op een andere manier naar te kijken. Vat de tekening van de driehoeken niet op als een platte tekening, maar als een ruimtelijke, zie figuur 2. Beschouw $ABC\ O$ als een piramide. Dan is $A'B'C'$ een doorsnede van die piramide met een vlak α. De lijnen AB en $A'B'$ liggen beide in het zijvlak OAB, dus ze snijden. Omdat AB in het grondvlak ligt, en $A'B'$ in α, ligt hun snijpunt dus op de snijlijn van α en de grond, dus op de grondlijn g. Idem voor Q en R. Dus P, Q en R liggen op één lijn.

Desargues algemener

Marleen Kooiman heeft de stelling van Desargues op twee manieren algemener gemaakt. Ze heeft gekeken of de stelling ook geldt als je met meer dimensies werkt. Dat leverde haar een versie op voor n-*simplices*, dat wil zeggen: voor de leden van een familie die begint met lijnstukken, driehoeken en viervlakken. In haar scriptie luidt het: *Als van twee n-simplices A en A' de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige zijden in eenzelfde $(n-1)$-dimensionale ruimte.*

In figuur 3 zie je de driedimensionale versie van de stelling. Ook hield ze zich bezig met de vraag of de stelling geldt voor vierhoeken, vijfhoeken, enzovoorts. De voorwaarde die zij voor n-hoeken vond, laten wij hier achterwege. Voor vierhoeken is het: de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten én van de snijpunten van de diagonalen gaan alle door één punt.



Figuur 3

Gaan van twee viervlakken de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige ribben in één vlak