

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π , e , $\ln 2$, $\ln 3$, $\dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten)

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken

$$I = \int_{-\infty}^0 e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

Vraag 3 (3 punten)

In de driehoek ABC geldt dat $a = \frac{7}{3}c$ en $b = \frac{8}{3}c$, waarbij $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$.

Gevraagd: toon aan dat $\frac{\sin \frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\sin \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} = \frac{-1}{3}$ en dat $\frac{\tan \frac{\hat{A}}{2}}{\tan \frac{\hat{B}}{2}} = \frac{1}{2}$, en bepaal vervolgens de waarde van de hoek $\hat{A}$.

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}$: $3^{2x-3} - 10 \cdot 3^{x-2} + 3 = 0$.

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de reële getallen a en b , alsook de wortels van de vergelijking

$$x^4 + x^3 - 12x^2 + ax + b = 0,$$

indien u weet dat deze vergelijking twee wortels heeft waarvan het product gelijk is aan 2, terwijl de twee andere wortels een som hebben gelijk aan 2.

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 2)$ en $C(3, 1, 1)$, en de rechte d met vergelijkingen

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 3, \\ 6x + 3y - z = 2 \end{cases}.$$

Gevraagd:

- (1) bepaal de cartesische vergelijking van het vlak α dat het punt A en de rechte d bevat;
- (2) bepaal de oppervlakte van de driehoek ABC .

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π , e , $\ln 2$, $\ln 3$, $\dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten)

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = e^{\frac{1}{2(x^2 - x)}}$ (domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, asymptoten, grafische voorstelling). Bereken ook linker- en rechterlimiet van de functie $f(x)$ in de discontinuïteitspunten.

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met partiële integratie,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

Vraag 3 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}^2$ ($\log = \log_{10}$):

$$\begin{cases} \log x + \log(y^2) = 4; \\ \log^2 x - 3 \log(xy) = -5. \end{cases}$$

Vraag 4 (3 punten) De volgende complexe vergelijking heeft één reëel nulpunt.

Bereken alle nulpunten.

$$z^3 - iz^2 + (1 - i)z - 2 + 2i = 0.$$

Vraag 5 (3 punten) Voor welke waarden $a, b \in \mathbb{R}$ geldt :

$$\text{als } \sin^2(a + b) = (\sin a + \sin b)^2 \text{ dan } \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b$$

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(0, 1, 0)$ en $B(2, 3, 1)$ en de rechte c met vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Gevraagd:

- (1) bepaal het punt $C \in c$ zo dat AB en AC elkaar loodrecht snijden;
 - (2) bepaal de cartesische vergelijking van de rechte d zo dat $A \in d$ en d loodrecht staat op het vlak bepaald door de punten A, B en C ;
 - (3) bepaal het punt $F \in d$ zo dat de afstand (AF) gelijk is aan de afstand (AC) .
-

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π , e , $\ln 2$, $\ln 3$, $\dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten) Bestudeer de functie $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \ln x$ (nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met een partiële integratie,

$$I = \int_4^{12} \frac{\ln(4+x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Vraag 3 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$x + 6 \leq \sqrt{x^3 + 7x^2 - 19x}.$$

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$(1+i)z^3 + (1-i)z^2 + 2z - 4 = 0,$$

indien u weet dat $z_1 = 1$ een reële oplossing is van deze vergelijking.

Geef ook het argument en de modulus van de oplossingen.

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de hoeken van de driehoek ABC , indien u weet dat $\hat{A} = 3\hat{B}$ en dat $|BC| = 2|AC|$.

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(4, -4, 0)$, $B(-4, 4, 0)$, $C(0, 0, 8)$ en $D(8, 8, 8)$, evenals het vlak α met vergelijking $x + 2y - z = 4$.

Gevraagd:

- (a) bepaal de cartesische vergelijking van het vlak β dat door A gaat en dat loodrecht staat op de rechte BC ;
 - (b) bepaal de coördinaat van het snijpunt P van de rechte BC met het vlak β ;
 - (c) bepaal de cartesische vergelijking van het vlak γ dat door het punt D gaat en dat evenwijdig is met het vlak α .
-

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π , e , $\ln 2$, $\ln 3$, $\dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (3 punten) Bereken, beginnend met een partiële integratie,

$$I = \int_1^3 \ln(x^2 - 2x + 5) dx.$$

Vraag 2 (5,5 punten)

(a) Toon aan dat voor elke reëel getal x geldt dat $e^x - x - 1 \geq 0$.

(b) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = x \frac{e^x}{e^x - 1}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, asymptoten, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 3 (2,5 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(-2, 1, -1)$ en $D(4, 1, 0)$.

Gevraagd:

(a) bepaal de cartesische vergelijking van het vlak α dat door de punten A , B en C gaat;

(b) bepaal de coördinaat van het voetpunt van de loodlijn neergelaten uit D op α .

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2iz^2 + (15 - 8i)z - 16 - 30i = 0,$$

indien u weet dat $z_1 = 2i$ één van de wortels van deze vergelijking is.

Geef ook het reëel deel en het imaginair deel van de wortels.

Vraag 5 (3 punten) Gegeven: de veeltermen $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ en $g(x) = x^2 + ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

Gevraagd: bepaal a en b zodanig dat de veelterm $g(x)$ de veelterm $f(x)$ deelt.

Vraag 6 (3 punten) Zij M het midden van de zijde $[BC]$ van de driehoek ABC .

Bewijs dat, indien $|AB| = |AM|$, dan $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$ en $\sin \hat{A} = 2 \sin(\hat{B} - \hat{C})$.

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π , e , $\ln 2$, $\ln 3$, $\dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\dots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten) (1) Toon aan dat $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$.

(2) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ (domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met de verandering van veranderlijke $t = \sqrt{e^x - 1}$,

$$I = \int_{\ln 2}^{(2 \ln 2)} \frac{3}{(2 + e^x) \sqrt{e^x - 1}} dx.$$

Vraag 3 (3 punten)

In de driehoek ABC geldt dat $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$, waarbij $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$

Gevraagd:

(1) toon aan dat $\hat{C} = 2\hat{A}$;

(2) bereken $\tan \frac{\hat{A}}{2}$.

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$z^2 - \frac{11+3i}{2+i}z = \frac{23-11i}{i-3}.$$

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de reële getallen a en b zodanig dat de veeltermen

$$x^3 + ax^2 - 14x + 12 \quad \text{en} \quad x^3 + bx^2 + 10x - 24$$

beiden deelbaar zijn door dezelfde veelterm van de tweede graad waarvan de coëfficiënt van x^2 gelijk is aan 1.

Vraag 6 (3 punten) Men beschouwt de raaklijn t in een punt P van de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2$. Deze raaklijn t snijdt de as van de parabool in het punt A en de topgraaklijn van de parabool in het punt B . De top van de parabool noemen we C .

Gevraagd: bepaal de vergelijking en de aard van de meetkundige plaats van het middelpunt M van de cirkel die door A , B en C gaat, wanneer P de parabool doorloopt.

Vraag 1 (1) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

(2) Bepaal de coördinaat van het punt P waarvoor geldt dat de raaklijn in P aan de grafiek van f door de oorsprong gaat.

Vraag 2 Bereken

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x^3 + 1} dx.$$

Opmerking: $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$ en $\sqrt{3}\pi \approx 5,4$.

Vraag 3 Los op in $\mathbb{R}$: $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

Vraag 4 Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad W = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix},$$

waarbij a een reële parameter is.

Gevraagd: bepaal alle waarden van a waarvoor geldt dat $AV = W$, en geef voor elke gevonden waarde van a de overeenkomstige waarde van $\det A$.

Vraag 5 In de driehoek ABC geldt dat $\sin(\hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}) = k \sin \frac{\hat{B}}{2}$, met k een reële en positieve constante.

Gevraagd: toon aan dat $\tan \frac{\hat{A}}{2} \tan \frac{\hat{C}}{2} = \frac{k-1}{k+1}$.

Vraag 6 In de ruimte voorzien van een orthonormale ijk beschouwt men de punten

$O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, 4)$, $B(4, 4, 2)$, $C(3, 1, 5)$.

Gevraagd:

(1) bepaal de cartesische vergelijking van de bollen die door de punten O , A en B gaan en met straal $= 3\sqrt{3}$;

(2) bepaal de coördinaat van het middelpunt en de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek OAB ;

(3) bepaal de coördinaat van het zwaartepunt van de driehoek ABC .

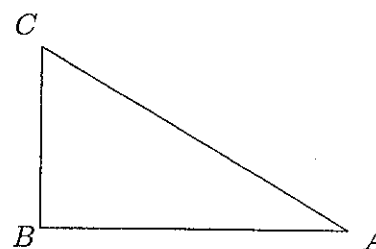
Vraag 1 Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(2x)}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 Bereken

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{16 \cos t}{(\cos^2 t + 3)^2} dt.$$

Vraag 3 In de driehoek ABC is $\hat{B} = 90^\circ$ en $\hat{A} < \hat{C}$ (zie figuur). Op de zijde $[AB]$ neemt men het punt P zodanig dat $|AP| = |BC|$ en op het verlengde van de zijde $[BC]$ neemt men het punt Q (C ligt tussen B en Q) zodanig dat $|CQ| = |AB|$. De rechte PQ snijdt de zijde $[AC]$ in R .



Gevraagd: toon aan dat $\hat{ARP} = 45^\circ$.

Vraag 4 Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken de matrix A^{-1} en de matrix X zo dat $A \cdot X = B \cdot A^{-1}$.

Vraag 5 Men beschouwt de rij positieve getallen $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, waarbij, voor elke $n > 1$, er geldt $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} = 4t_n$.

Vervolgens beschouwt men een nieuwe rij $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, waarbij, voor elke $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} t_n}.$$

Gevraagd: (a) toon aan dat de rij $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ een meetkundige rij is;

(b) bepaal de uitdrukking van $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ als functie van n , indien u weet dat $t_6 = 16$.

Vraag 6 Gegeven: een kubus met zijde 6.

Een bol gaat door de 4 hoekpunten van het grondvlak en raakt aan het bovenvlak.

Gevraagd: stel de vergelijking van deze bol op (ten opzichte van een zelfgekozen orthonormale ijk).

Vraag 1

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$
(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2

Bereken:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5 \sin x + 4 \cos x + 5} dx \quad \text{en} \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x}.$$

Opmerking: neem aan dat $\ln 3 = 1,1$ en dat $\ln 5 = 1,6$.

Vraag 3

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

- (a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$;
(b) $\log_2(2^{x+1} - 15) + x = 3$.

Vraag 4

Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gevraagd:

- (1) toon aan dat er reële getallen a en b bestaan waarvoor geldt dat

$$(A + aI_3)B = bC^{-1},$$

waarbij I_3 de eenheidsmatrix is van orde 3;

- (2) bepaal A^{-1} .

Vraag 5 In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(0, 2, 1)$ en $B(-1, 1, 3)$, evenals het vlak α met vergelijking $x + 5y + 9z - 13 = 0$ en het vlak β met vergelijking $3x + ky - 5z + 1 = 0$, waarbij k een reële parameter is.

Gevraagd: bepaal de waarde van de parameter k opdat de rechte AB de snijlijn van de vlakken α en β zou snijden.

Vraag 1 (a) Bereken $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x - 1)^2$.

(b) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x)

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 Bereken de volgende integralen:

$$(a) \quad I_1 = \int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}} \frac{12}{x \sqrt{36 - x^2}} dx, \quad (b) \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x \ln(1 + \cos^2 x) dx.$$

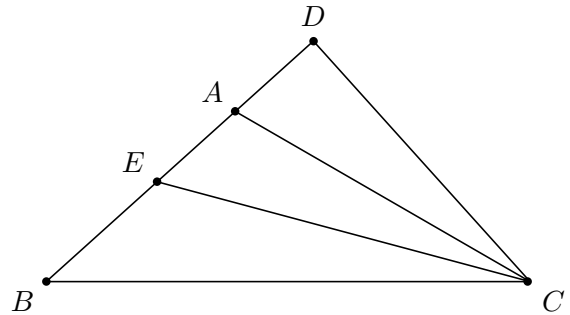
Vraag 3 In de driehoek ABC is $\hat{A} = \alpha > 90^\circ$.

De hoogtelijn neergelaten uit C snijdt het verlengde van de zijde $[AB]$ in D en de bissectrice van de hoek C snijdt $[AB]$ in E (zie figuur). Verder stelt men $\hat{B} = \beta$.

Gevraagd:

- (a) druk de hoek $\hat{E}CD$ uit als functie van α en β ;
 (b) toon aan dat, indien $|AD| = |AE|$, er geldt

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1.$$



Vraag 4 Los de volgende ongelijkheid op in $\mathbb{R}$:

$$\log_2(x+1) + \log_4(x) < 1.$$

Vraag 5 Gegeven: de cirkel C met middelpunt $M(0,4)$ en straal $R = 2$ en de rechte d met vergelijking $y + 3 = 0$.

Gevraagd: bepaal de cirkels die door de oorsprong gaan en die raken aan de cirkel C en de rechte d .

Vraag 1

Bestudeer de functie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2

Bereken

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1 \right) \sin x}.$$

Vraag 3(1) Toon aan dat $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.(2) Los op in $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \sin x.$$

Vraag 4

Bereken

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{96}{x^4 \sqrt{4-x^2}} dx.$$

4 vragen

Vraag 1**Gegeven:** volgende vergelijking met m een reële parameter

$$x^2 + mx + 2 = 0.$$

Gevraagd: bepaal de verzameling der waarden van m zo dat de vergelijking twee reële verschillende nulpunten heeft waarbij het grootste nulpunt groter is of gelijk aan twee maal het kleinste nulpunt.

Vraag 2**Gegeven:** de matrix A met x, y en z reële parameters

$$A = \begin{bmatrix} z - y & -\frac{x + y}{2} \\ 0 & z - 2x \end{bmatrix}$$

Gevraagd: bepaal x, y en z zo dat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vraag 3**Gegeven** volgende vergelijking met a en b reële parameters

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3} - i)^8} = a + ib, \quad i^2 = -1.$$

Gevraagd: bepaal a en b .

Vraag 4**Gegeven:** het regelmatig viervlak $ABCD$ met zijde $|AB| = k$. Het orthonormaal assenstelsel wordt zodanig gekozen dat de oorsprong O samenvalt met het midden van $[AB]$ en $A, B \in x$ -as en $C \in y$ -as.**Gevraagd:**

- (1) de coördinaat van A, B, C en D ;
 - (2) de coördinaat van het middelpunt van de omschreven bol van het viervlak $ABCD$;
 - (3) de straal van deze omschreven bol.
-