Plaats van de frets op een gitaar

Praktische Opdracht Wiskunde
Door: Martijn de Bruijn en Ramon Handulle
Klas: 4HN5

Bronnen

1. "Encyclopie van muziekinstrumenten", uitgeverij Helmond B.V.
Helmond 1977. Bladzijde 194: Klassieke en akoustische gitaren.
2. "Gitaar Starter 1. Elementaire Gitaarmethode door Cees Hartog", uitgeverij ALSBACH- EDUCA Flevolaan 41 - Naarden - Holland 1984. Bladzijde 6.

Inleiding

De gitaar is in veel delen van de wereld een populair instrument. Naast de klassieke akoustische gitaar bestaan er ook elektrische gitaren, zoals de elektrische basgitaar.
In de figuur van bijlage A is afgebeeld hoe een klassieke gitaar er uit ziet. Daarbij staan ook de namen van de delen waaruit de gitaar bestaat. In ons verslag worden de volgende onderdelen dikwijls genoemd: *brug*, *frets* en *kam*.
De functie van de verschillende onderdelen is als volgt:
- De kop met de stemmechanieken dient om de snaren te stemmen.
- De snaren worden gespannen tussen de brug en de kam.
Bij een losse snaar kan het gedeelte tussen brug en kam trillen. Daarom noemen we in ons verslag de brug ook wel *fret 0*.
- De hals is de plaats waar je je vingers van de linkerhand neerzet. Hiermee druk je de snaren tegen de frets. Wanneer je nu tokkelt tegen een snaar dan gaat het gedeelte tussen de fret en de kam trillen.
- De trilling wordt overgedragen op de klankkast, die ook wel de romp wordt genoemd. Door resonantie van de klankkast wordt de trilling versterkt. Via het klankgat komt de trillende lucht naar buiten en bereikt als geluid je oren.

Opmerking

De lengte van een losse (niet aangedrukte) snaar is altijd de lengte tussen brug en kam. De toon van een losse snaar wordt alleen nog maar bepaald door het materiaal, de dikte en de spanning. De zes (nylon) snaren die je op een akoustische gitaar spant zijn verschillend in dikte. De drie dikste snaren zijn omwonden met metaaldraad. Afstellen van de spanning van de snaren met de schroeven in de gitaarkop heet het stemmen van de gitaar. Het stemmen is een nauwkeurig werkje. De snaren zijn, van dik naar dun, meestal gestemd als volgt:

`lage E , lage A , D , G , B , hoge E`

Probleemstelling

Het is nu duidelijk wat de verschillende functies zijn van de onderdelen van een klassieke gitaar. Maar het is niet zo duidelijk waarom sommige onderdelen nu juist deze bepaalde vorm hebben. Waar we ons in deze Praktische Opdracht Wiskunde mee bezig zullen houden is de volgende vraag:

Waarom zijn de frets op de hals van een gitaar op deze manier geplaatst ?

Waarom staan ze bijvoorbeeld niet op gelijke afstanden van elkaar? Niet alleen bij akoustische gitaren, maar ook bij elektrische gitaren en instrumenten zoals luiten, citers en banjo's zie je ongeveer dezelfde soort verdeling van de frets. Deze verdeling is in ieder geval niet lineair, want de frets staan niet op gelijke afstanden van elkaar, maar wat is het dan wél ?

Praktische aanpak

We hebben het probleem van de frets op een gitaar eerst op een praktische manier aangepakt door met een meetlint de plaats van de frets op te meten. Hierbij moet je goed letten op wat je precies wilt meten. Waar het bij een gitaar om gaat is het trillen van de snaren. Je moet dus het gedeelte opmeten wat gaat trillen en niet het gedeelte wat niet kan trillen. Je moet dus het gedeelte tussen kam en frets opmeten en niet het gedeelte tussen brug en frets.
Bij iedere fret hoort een klank. Als je de vingers van de linkerhand één fret opschuift in de richting van de kam, dan wordt de klank een halve toon hoger. Als de frets oplopend worden genummerd dan komen deze nummers overeen met het aantal halve tonen dat de klank hoger is, vergeleken bij een losse snaar.
We hebben deze metingen gedaan voor twee verschillende gitaren: de klassieke gitaar van Martijn de Bruijn en de elektrische basgitaar van een buurjongen van Martijn: Marco van Es. De metingen zijn verwerkt in twee tabellen, die in het verslag zijn opgenomen als bijlage B.
Om een idee te krijgen van het soort functie waar we mee te maken hebben, zijn de metingen ook verwerkt in twee grafieken. Op de x-as hebben we de toonhoogte uitgezet: dat is het nummer van de fret, gerekend vanaf de brug. En op de y-as hebben we de bijbehorende lengtes van de snaren tussen kam en fret uitgezet. De twee grafieken zijn in het verslag opgenomen als bijlage C.
De volgende stap was om na te gaan met welke functie we te maken hebben. Uit de grafieken (C) zien we dat we in ieder geval geen rechte lijnen hebben. In de tabellen (B) hebben we twee opeenvolgende getallen steeds door elkaar gedeeld en er kwam iedere keer ongeveer hetzelfde uit. Daardoor weten we dat de functie die we zoeken een exponentieel verband is en we hebben de delingen daarom "groeifactor" genoemd. Bovendien is te zien dat de groeifactor van de klassieke gitaar hetzelfde is als de groeifactor van de elektrische basgitaar.
We hebben dus voor beide gitaren een exponentieel verband. De beginwaarde

van de exponentiële functie is de lengte van de losse snaren tussen kam en brug. Deze beginwaarde is voor de klassieke gitaar kleiner dan voor de elektrische basgitaar. Dat de beginwaarde van de exponentiële functie de lengte is van de losse snaren is logisch. Ook daarom heet de brug *fret 0*, want daar begint de functie.
Wat we nu nog moeten zien te begrijpen is de groeifactor, waarvan we denken dat die voor allebei de gitaren hetzelfde is. Het is in ieder geval nuttig om de gemiddelde groeifactor, voor allebei de gitaren samen, te berekenen en om tegelijkertijd de grootste afwijking van dit gemiddelde te bepalen. Dit kunnen we bijvoorbeeld doen met de grafische rekenmachine. De uitkomst is:

$$\text{Gemiddelde groeifactor} = 0.9442 \pm 0.0037$$

Theoretische aanpak

We moeten iets van natuurkunde en van muziek weten om de plaats van de frets op de hals van een gitaar te kunnen begrijpen.
Om te beginnen moeten we weten dat een snaar die je twee keer zo kort maakt, twee keer zo snel gaat trillen. Uit de natuurkunde weten we dat de frequentie van de geluidstrilling dan twee keer zo groot wordt. Uit de muziek weten we dat een twee keer zo hoge frequentie overeenkomt met een oktaaf hoger.
Als je dat stuk snaar nu weer twee keer zo kort maakt, dan wordt de frequentie weer twee keer zo groot en gaat de toon weer een oktaaf omhoog.
Als je een frequentie van 440 Hz hebt (de toon A) en je doet een oktaaf erbij, dan krijg je een toon van 440 x 2 = 880 Hz (hoge A). Enzovoort.
Een oktaaf erbij betekent dus voor de snaarlengte: telkens twee keer zo kort.
Stel dat de losse snaar een lengte L heeft en daarbij hoort een bepaalde toon. Dan hoort bij een snaar met lengte L/2 (de helft van lengte L) een toon die een oktaaf hoger klinkt. Een snaar met lengte L/4 klinkt weer een oktaaf hoger. Enzovoort.
Nu bestaat in de muziek een oktaaf uit twaalf stappen van een halve toon. We kunnen dit op de hals van een gitaar controleren: de twaalfde fret moet op de helft van de snaren, midden tussen brug en kam liggen. Of de twaalfde fret zit precies in het midden van de snaren. Dit is bij allebei de gitaren zo.
Iedere halve toon moet overeenkomen met een verdere inkorting van de snaar. Maar we weten nog niet hoeveel we de snaar bij een halve toon iedere keer moeten inkorten. We noemen daarom de inkorting 'q' (= nog onbekend).
Bij de eerste halve toon wordt de snaar q keer zo kort, dat is $q.L$
Bij de tweede halve toon wordt de snaar weer q keer zo kort, dat is $q.(q.L)$
Bij de derde halve toon wordt de snaar weer q keer zo kort, dat is $q.q.q.L$
Enzovoort.
Bij de twaalfde halve toon wordt de snaar weer q keer zo kort, dat is in totaal twaalf vermenigvuldigingen met q, ofwel q tot de twaalfde macht:

$$q.q.q.q.q.q.q.q.q.q.q.q.L = q^{12}.L$$

Maar bij een oktaaf weten we ook dat de snaar precies twee keer zo kort is, dus de inkorting is ook gelijk aan:

$$\frac{1}{2}L$$

We hebben nu twee formules voor de inkorting van de snaar. De ene formule stelt voor dat je 12 keer je vingers verplaatst naar de kam, waardoor je op de 12-de fret uitkomt. De andere formule stelt voor dat je in één keer naar de helft van de snaar gaat. Maar we weten dat de twaalfde fret precies op de helft van de snaar zit. Uit allebei de formules moet hetzelfde komen. Dus:

$$q^{12}.L = \frac{1}{2}L$$

Aan beide kanten van deze gelijkheid kunnen we de lengte L weglaten (aan beide kanten kun je door L delen):

$$q^{12}.L = \frac{1}{2}L$$

Trekken we aan beide kanten de twaalfde machtswortel, dan komt aan de linkerkant gewoon q te staan en aan de rechterkant de twaalfde machtswortel uit een half:

$$q = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$$

Dit is de groeifactor van de exponentiële functie, die we zochten.
De twaalfde machtswortel uit een half is gewoon een getal, dat dus voor elke gitaar hetzelfde is. Dus is het inderdaad zo dat de groeifactor niet afhangt van het soort gitaar. Dit hadden we ook al uit de metingen gevonden. Met de grafische rekenmachine kunnen we de twaalfde machtswortel uit een half uitrekenen:

$$\sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0.9439$$

Vergelijken we dit met de waarde die we uit de metingen hebben vonden:

$$\text{Gemiddelde groeifactor} = 0.9442 \pm 0.0037$$

Dan zien we dat de theoretische waarde heel goed overeenkomt met de gemiddelde waarde uit de metingen.

Samenvatting

Bij een klassieke gitaar en een elektrische basgitaar hebben we de lengtes van de snaren opgemeten tussen kam en frets. Deze lengtes zijn in de grafieken uitgezet langs de y-as.
We hebben ook de frets, gerekend vanaf de brug, oplopend genummerd (waarbij de brug zelf wordt meegerekend als fret 0). De nummers komen overeen met telkens een halve toon hoger van de klank. Deze nummers zijn in de grafieken uitgezet langs de x-as.
We vinden uit metingen en ook met een theorie dat het verband tussen x en y een exponentiële functie $y = f(x)$ is.
De beginwaarde van deze functie is gelijk aan de lengte L, tussen brug en kam, van de losse snaren.
De groeifactor q van de exponentiële functie hangt niet af van het soort gitaar en kan worden bepaald uit de metingen of uit het feit dat in de muziek een oktaaf uit twaalf halve tonen bestaat:

$$q = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0.9439$$

Conclusie

We hebben onderzocht welk verband $f(x)$ er bestaat tussen de toonhoogte x (of het fretnummer x) en de lengte y tussen kam en fret op een gitaar.
Deze functie $f(x)$ wordt gegeven door:

$$y = f(x) = L.q^x \qquad \text{met} \qquad x = 0, 1, 2, 3, ..., 19, 20, 21$$

Waarbij de beginwaarde L de lengte is (van de losse snaren) tussen kam en brug en de groeifactor q gelijk is aan een getal, namelijk de twaalfde machtswortel uit een half:

$$q = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$$