

# **Microsoft Mathematics - versie 4**

## **Microsoft Wiskundehulp**

Dag van de wiskunde 2e – 3e graad – zaterdag 17 november 2012

Paul Decuypere

---

# Inhoud

<b>1</b>	<b>Inleiding .....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Basisbewerkingen .....</b>	<b>6</b>
2.1	Het startscherm van <i>Wiskundehulp</i> - enkele basisinstellingen .....	6
2.2	Invoeren van uitdrukkingen .....	8
2.3	Stapsgewijze oplossingen .....	10
<b>3</b>	<b>Hulpprogramma's .....</b>	<b>11</b>
3.1	De module Vergelijkingen oplossen .....	11
3.2	De module Driehoeken oplossen .....	13
3.3	Formules en vergelijkingen .....	13
3.4	Eenhedenconversie .....	13
<b>4</b>	<b>Grafieken .....</b>	<b>14</b>
4.1	Grafieken van vergelijkingen en functies .....	14
4.1.1	Een eerste voorbeeld .....	14
4.1.2	Een functie met parameters .....	15
4.1.3	Grafieken van vergelijkingen .....	15
4.2	Grafieken van parameterkrommen .....	17
4.3	Grafieken van ongelijkheden .....	18
<b>5</b>	<b>Lineaire algebra .....</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Statistiek en kansrekenen .....</b>	<b>21</b>
6.1	Ingeven van lijsten van gegevens .....	21
6.2	Statistische berekeningen .....	21
6.2.1	Voorbeeld .....	22
6.3	Kansrekenen .....	23
<b>7</b>	<b>Analyse .....</b>	<b>24</b>
7.1	Limietberekeningen .....	24
7.2	Afgeleiden .....	25
7.3	Onbepaalde integralen .....	25
7.4	Bepaalde integraal .....	26
7.5	Sommen (reeksen) berekenen .....	26
<b>8</b>	<b>De invoegtoepassing <i>Microsoft Math</i> .....</b>	<b>27</b>
8.1	Berekeningen maken .....	27
8.1.1	Numerieke berekeningen .....	27
8.1.2	Berekeningen met breuken .....	27
8.1.3	Goniometrische, logaritmische en andere standaard functies .....	28
8.2	Oplossen van vergelijkingen .....	28
8.2.1	Vergelijking met één onbekende .....	28
8.2.2	Vergelijking met meerdere onbekenden .....	28
8.3	Grafieken .....	29
8.3.1	Een functie plotten .....	29
8.3.2	De twee leden van een vergelijking plotten .....	30
8.3.3	Een vergelijking in x en y .....	31
8.3.4	Ongelijkheden .....	31
8.4	Analyse .....	32
8.4.1	Afgeleiden .....	32
8.4.2	Integralen .....	32
8.5	Matrices .....	33
8.6	Statistische berekeningen .....	33

# 1 Inleiding

Het programma *Microsoft Mathematics* of *Microsoft Wiskundehulp* (huidige versie is versie 4.0) is een gratis programma van Microsoft dat in een Nederlandstalige versie te downloaden via de volgende website:

<http://www.microsoft.com/downloads/nl-nl/>

Vul dan in het zoekvenster “wiskundehulp” in.

Je krijgt dan volgende keuze:

Titel	Uitgebracht
<b>Invoegtoepassing Wiskundehulp</b> Met de invoegtoepassing Microsoft Wiskundehulp voor Word en OneNote kunt u in Word-documenten en OneNote-notatieblokken heel eenvoudig grafieken in 2D en 3D tekenen, numerieke uitkomsten berekenen, vergelijkingen of verschillen oplossen en algebraïsche expressies vereenvoudigen.	30-12-2010
<b>Microsoft Wiskundehulp 4.0</b> Microsoft Wiskundehulp bevat een grafische rekenmachine waarmee kan worden getekend in 2D en 3D, het stap-voor-stap oplossen van vergelijkingen en nuttige hulpmiddelen om leerlingen wiskunde en scheikunde te helpen studeren.	1-4-2011

Klikken op *Microsoft Wiskundehulp 4.0* brengt je dan in een scherm waar je het installatieprogramma van *Microsoft Wiskundehulp/Mathematics* kan downloaden. Bemerkt dat je zowel een 32-bitversie als een 64-bitversie kunt installeren (een 64-bitversie heeft alleen zin als ook de Windows versie een 64-bitversie is). Maar omdat de invoegtoepassing alleen een 32-bit invoegtoepassing is, werk je beter met de 32-bit versie.

Het programma is bedoeld voor het secundair onderwijs. Het is een CAS programma (Computer Algebra Systeem) dat toelaat om heel wat berekeningen (ook symbolische) te maken. Van uitwerken, over ontbinden in factoren, rekenen met veeltermbreuken, wortelvormen, maken van grafieken tot het berekenen van afgeleiden en integralen. Er zijn ook enkele aparte modules o.a. een voor het oplossen van vergelijkingen en een voor het oplossen van driehoeken.

Mooi is wel dat bij een aantal berekeningen niet alleen het resultaat getoond wordt, maar ook de tussenschappen van de berekeningen.

Het programma *wiskundehulp* is wiskundig niet zo sterk uitgebouwd als bijvoorbeeld *Derive* of *Maxima* (je zult al wel eens een integraal willen berekenen waar *wiskundehulp* zich in verslikt), maar al bij al kan het toch heel wat. Het oogt overigens modern, en is heel gebruiksvriendelijk.

Naast het eigenlijke programma *Wiskundehulp* bestaat ook een bijkomende invoegtoepassing (add-in) met de naam *Invoegtoepassing Wiskundehulp* of *Invoegtoepassing Microsoft Math*. Na installatie werkt die add-in samen met de nieuwe vergelijkingeditor in Microsoft Word 2007/2010.

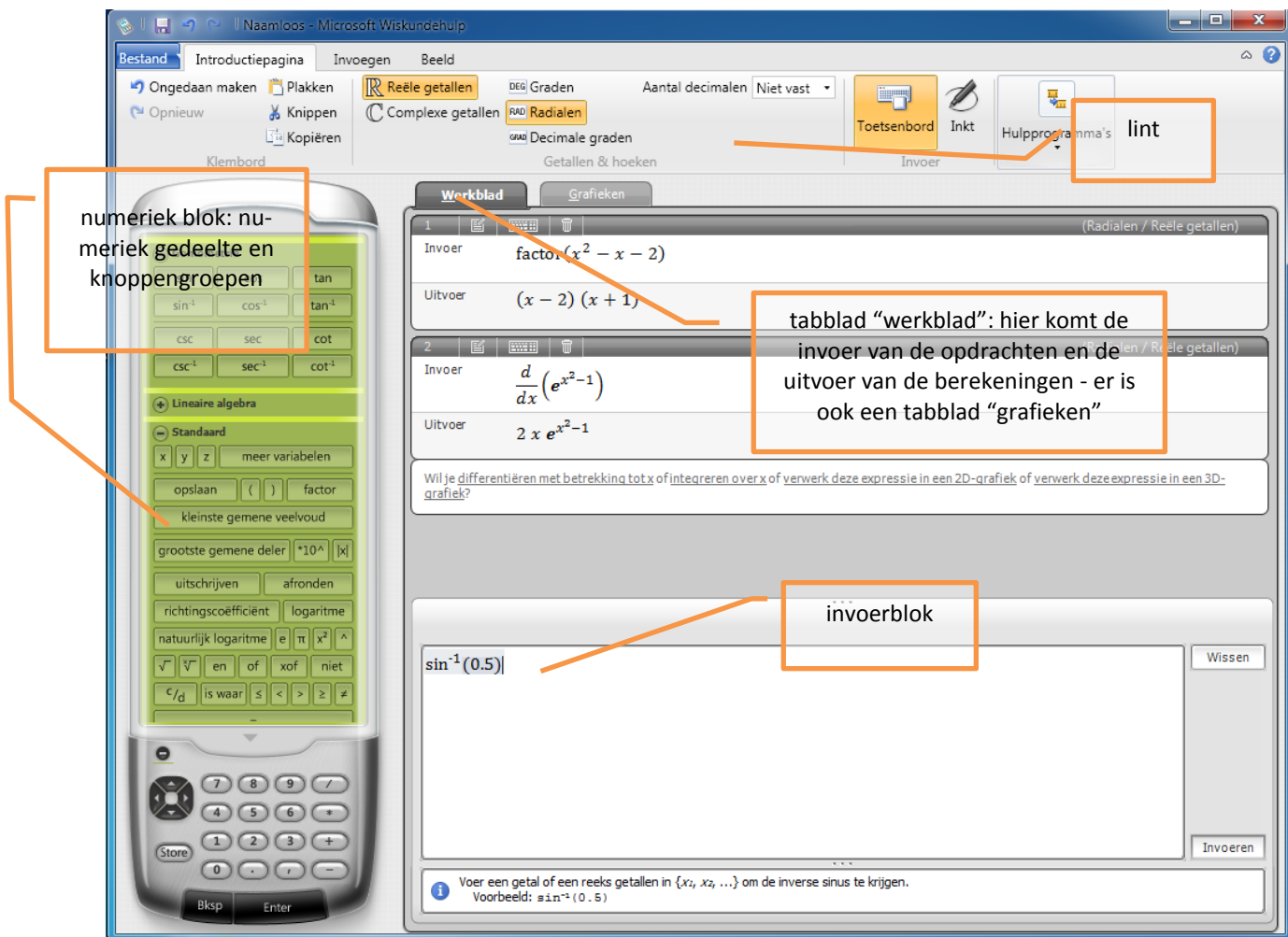
Om de invoegtoepassing te installeren kun je via hetzelfde zoekscherm op de downloadpagina van Microsoft onmiddellijk ook de link naar deze invoegtoepassing vinden (zie afbeelding hierboven). Op die manier kun je vanuit Word niet alleen wiskundige items intypen (bijvoorbeeld een vergelijking), maar die meteen ook laten uitvoeren (dus de vergelijking laten oplossen zonder zelf verder te typen). We komen hier in het laatste deel van de syllabus op terug.



Begin dus best met het downloaden en installeren van enerzijds het programma *Microsoft Wiskundehulp* (32-bitversie), en anderzijds de invoegtoepassing *MASetup.exe*. Let er op dat je bij het downloaden kiest voor de Nederlandstalige versies.

## 2 Basisbewerkingen

### 2.1 Het startscherm van *Wiskundehulp* - enkele basisinstellingen



Er zijn twee tabbladen: een werkblad (waar de invoer van de opdrachten en uitvoer van de resultaten van de berekeningen verschijnen) en een tabblad "grafieken" (voor het tekenen van grafieken). Het invoeren van een uitdrukking gebeurt onderaan in het invoerblok van het werkblad.

We bekijken eerst enkele instellingen van het programma.



Kies in het *Lint* bovenaan de tab *Introductiepagina*. In de groep *Getallen en hoeken* kan je instellen:

- of de berekeningen gebeuren met reële getallen of met complexe getallen
- of de hoekenheid in (zestigdelige) graden of in radialen gekozen wordt (of in decimale graden)
- hoeveel cijfers na de komma de resultaten van de uitvoer moeten bevatten (standaard staat dit op *niet vast*, wat betekent dat het programma zelf probeert uit te maken wat de beste weergave is



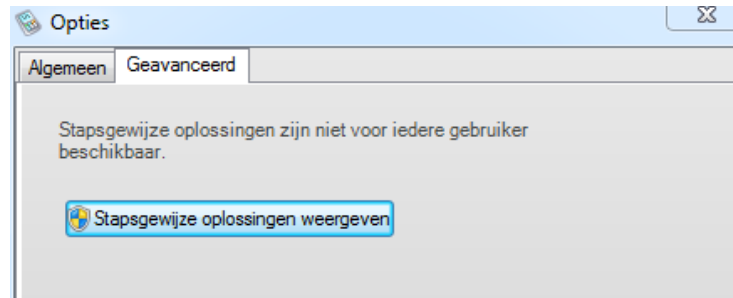
Kies in het *Lint* bovenaan weer de tab *Introductiepagina*. In de groep *Invoer* kan je kiezen voor *Toetsenbord* of *Inkt*. De laatste keuze is alleen zinvol als je over een invoertablet beschikt. Je kan bij *inkt* de invoer ook met de muis proberen, maar dit is niet handig. Laat het ons in deze syllabus maar op *Toetsenbord* houden.



Kies in het *Lint* bovenaan de tab *Beeld*. Hier kunnen een aantal instellingen over de weergave van het programma geregeld worden (kleurenweergave van het numeriek blok en van het gehele program-mavenster). Je kan er ook voor kiezen om het numeriek blok al dan niet te verbergen.

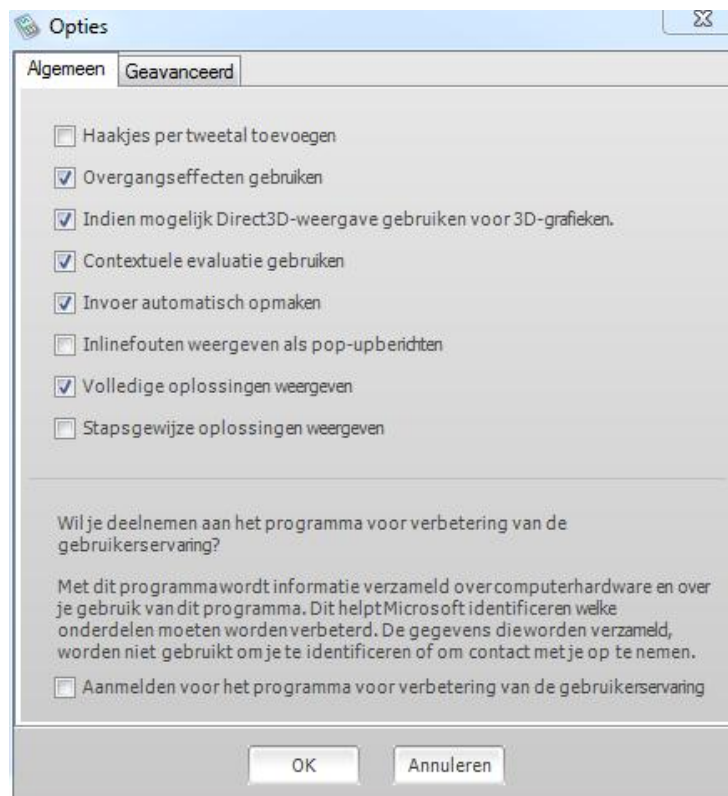


Het is mogelijk om tijdens de uitvoer van berekeningen voor een oplossing, ook de stappen van de berekening te laten zien. Deze mogelijkheid voor *Stapsgewijze oplossingen* moet wel eerst principieel voorzien zijn. Dat doe je via *Bestand > Opties > tabblad Geavanceerd*:



Klik hier op de knop *Stapsgewijze oplossingen weergeven* (als boven deze knop al staat “Stapsgewijze oplossingen zijn voor alle gebruikers beschikbaar”, dan is de instelling al in orde en moet je de knop niet aanklikken). Deze instelling is alleen te wijzigen met beheerdersrechten.

Na deze instelling is alleen principieel voorzien in deze mogelijkheid. Wil je nu nog effectief de stapsgewijze oplossingen gebruiken, dan moet in *Bestand > Opties > tabblad Algemeen* nog een vinkje gezet worden bij *Stapsgewijze oplossingen weergeven*:



Hier zijn geen beheerdersrechten meer voor nodig, elke gebruiker van het programma kan dit doen.



In *Bestand > Opties > tabblad Algemeen* zit ook de mogelijkheid om bij het typen van haakjes meteen beide haakjes aan te brengen (openen en sluiten van haakjes). Als je dit wenst, zet dan een vinkje bij de eerste mogelijkheid.



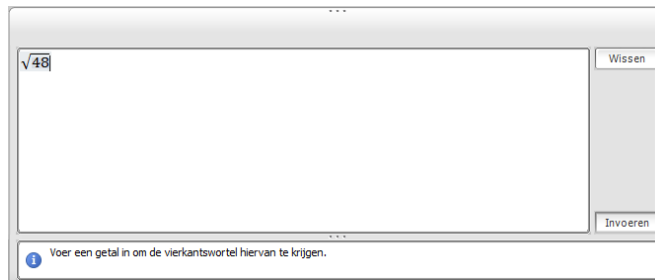
In het numeriek blok vind je onderaan een rekentoestel om cijfers en bewerkingen in te typen (dit kan natuurlijk ook gewoon met het toetsenbord). Daarboven heb je verschillende knoppengroepen die je open kunt houden (knop + gebruiken bovenaan links in de groep of gesloten (knop – gebruiken)). Zoals al gemeld is de weergave van dit numeriek blok is in te stellen via *Beeld > Weergaven*. Er zijn hier een aantal varianten in kleur en weergave, standaard is gekozen voor *Techno*.

## 2.2 Invoeren van uitdrukkingen

Invoeren van uitdrukkingen doe je altijd in het invoerblok onderaan (kies zo nodig eerst het tabblad *Introductiepagina* in het lint bovenaan, en dan het tabblad *Werkblad*). We werken hier met invoer via het *toetsenbord* (maar zoals eerder gemeld: het kan ook via *inkt* als je beschikt over een tablet).

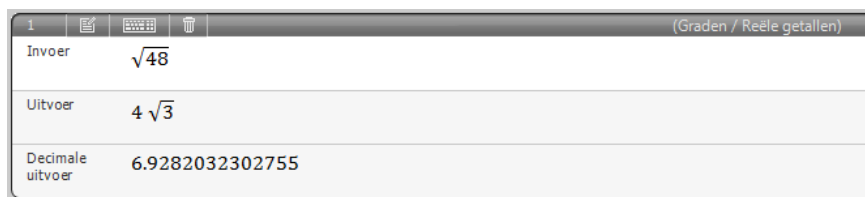
Geef bijvoorbeeld een eenvoudige berekening in:  $\sqrt{48}$


Het vierkantswortelteken kan je aanklikken via het numeriek blok (eerst openen van het onderdeel *Standaard*). Je mag ook *sqrt(48)* intypen:




Na het intypen van de uitdrukking, klik je op de knop *Invoeren* rechts onderaan. Je kan ook gewoon op de <Enter> toets drukken. Wil je alles wissen in het invoerblok, gebruik dan de knop *Wissen* rechts bovenaan het invoerblok.

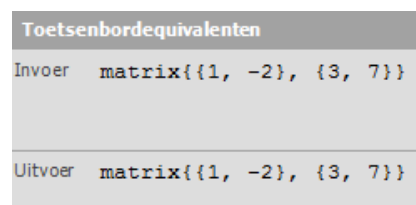
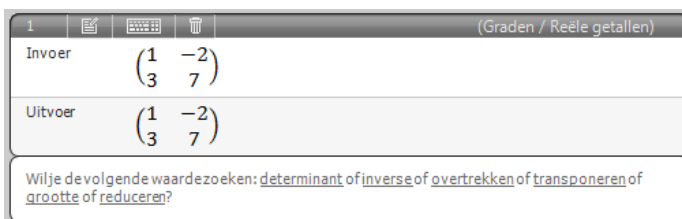
In het werkblad verschijnt dan een resultaatvenstertje met de invoer gevolgd door de uitvoer zo exact mogelijk en daarna de uitvoer als decimaal getal:




Wil je iets wijzigen aan de invoer, dan kun je in dit resultaatvenstertje dubbel klikken op  $\sqrt{48}$  ofwel in dit venstertje de knop  *Invoer bewerken* aanklikken. Beide methodes brengen de ingevoerde uitdrukking terug naar het invoerblok, waar het kan aangepast worden.

Klik je daarna op *Invoeren*, dan wordt een nieuw resultaatvenster ingevoerd met de aanpassingen, de wijzigingen komen dus niet in het oorspronkelijke venster.

Klik je in zo'n resultaatvenster bovenaan op de knop  *Toetsenbordequivalenten* dan krijg je te zien hoe de invoer ook via het toetsenbord kon. In dit voorbeeld hierboven geeft dit de melding dat de vierkantswortel ook via *sqrt* kon ingegeven worden. Een duidelijker voorbeeld is het ingeven van een matrix via het toetsenbord: geef dan eerst eens een matrix in via *Lineaire algebra* in het *Numeriek blok* en kijk dan nadien hoe het toetsenbordequivalent er uit ziet.



Bij het invullen van de elementen van een matrix: gebruik de toets "pijl rechts" van het toetsenbord om naar het volgende element over te gaan.

De resultaatvensters worden genummerd weergegeven in het werkblad. Wil je zo'n venster met invoer en uitvoer wissen, klik dan op de knop  bovenaan. Het is blijkbaar niet mogelijk om alle vensters in één keer te wissen.

Nog enkele eenvoudige voorbeelden

- Als de hoekenheid op *graden* staat:

1		(Graden / Reële getallen)
Invoer	$\sin(45)$	
Uitvoer	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
Decimale uitvoer	0.7071067811865	

2		(Graden / Reële getallen)
Invoer	$\sin^{-1}(-0.5)$	
Uitvoer	-30	

- Als de hoekenheid op *radialen* staat:

1		(Radialen / Reële getallen)
Invoer	$\sin^{-1}(-0.5)$	
Uitvoer	$-\frac{\pi}{6}$	
Decimale uitvoer	-0.5235987755983	

- Ontbinden in factoren van een veelterm (gebruik *factor* uit de groep *Standaard* van het rekenblok):

1		(Radialen / Reële getallen)
Invoer	$\text{factor}(x^2 - x - 2)$	
Uitvoer	$(x - 2)(x + 1)$	

- Ontbinden in factoren van een geheel getal:

1		(Radialen / Reële getallen)
Invoer	$\text{factor}(1800)$	
Uitvoer	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	
Decimale uitvoer	1800	

- grootste gemeenschappelijke deler van enkele gehele getallen:

1		(Radialen / Reële getallen)
Invoer	$\text{gcf}(182, 56)$	
Uitvoer	14	

- Logaritmen:

1	
Invoer	$\log(100)$
Uitvoer	2

2	
Invoer	$\ln(e^3)$
Uitvoer	3

3	
Invoer	$\log_2(8)$
Uitvoer	3

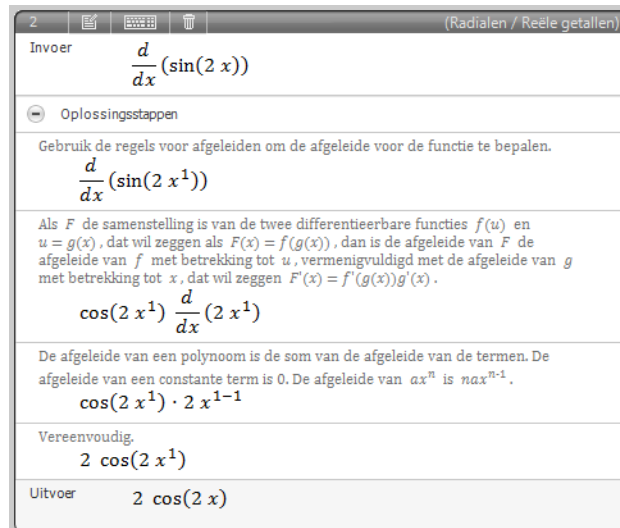
  

4	
Invoer	$\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right)$
Uitvoer	$-\frac{5}{2}$
Decimale uitvoer	-2.5

De knoppen voor de Briggse logaritme en de natuurlijke logaritme staan in het numeriek blok bij de groep *Standaard*. Maar ook andere logaritmen zijn mogelijk. Het grondtal van een logaritme moet ingevoerd worden als een index achter de functie "log". Zo'n index type je in via een laag streepje. Je moet dus intypen:  $\log_2$ <spatie>8

## 2.3 Stapsgewijze oplossingen

Bij een aantal uitdrukkingen die verwerkt worden door *Wiskundehulp*, is er de mogelijkheid om uitleg te krijgen bij de werkwijze, of om tussent stappen te kunnen zien in de berekeningen. Er verschijnt dan namelijk tussen *Invoer* en *Uitvoer* een mogelijkheid tot bekijken van *oplossingsstappen*. Bijvoorbeeld (klik op de + naast *Oplossingsstappen*):



2 (Radialen / Reële getallen)

Invoer  $\frac{d}{dx}(\sin(2x))$

Oplossingsstappen

Gebruik de regels voor afgeleiden om de afgeleide voor de functie te bepalen.

$\frac{d}{dx}(\sin(2x^1))$

Als  $F$  de samenstelling is van de twee differentieerbare functies  $f(u)$  en  $u = g(x)$ , dat wil zeggen als  $F(x) = f(g(x))$ , dan is de afgeleide van  $F$  de afgeleide van  $f$  met betrekking tot  $u$ , vermenigvuldigd met de afgeleide van  $g$  met betrekking tot  $x$ , dat wil zeggen  $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .

$\cos(2x^1) \frac{d}{dx}(2x^1)$

De afgeleide van een polynoom is de som van de afgeleide van de termen. De afgeleide van een constante term is 0. De afgeleide van  $ax^n$  is  $nax^{n-1}$ .

$\cos(2x^1) \cdot 2x^{1-1}$

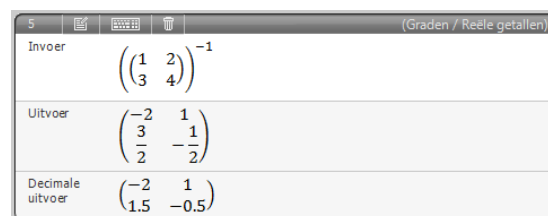
Vereenvoudig.

$2 \cos(2x^1)$

Uitvoer  $2 \cos(2x)$

In vergelijking met versie 3 van het programma zijn er veel minder situaties waar je dergelijke uitleg krijgt. Dat komt waarschijnlijk omdat in die versie 3 de uitleg niet altijd even duidelijk was en omdat bij moeilijker oefeningen het programma de uitleg toch niet kon weergeven. Er zijn iets meer oplossingsstappen bij het gebruik van reële variabelen dan bij het gebruik van complexe.

Ook nu duiken nog vreemde situaties op. Als je bijvoorbeeld de inverse matrix opvraagt van een matrix, dan krijg je wel het resultaat maar geen mogelijkheid om tussent stappen te zien:



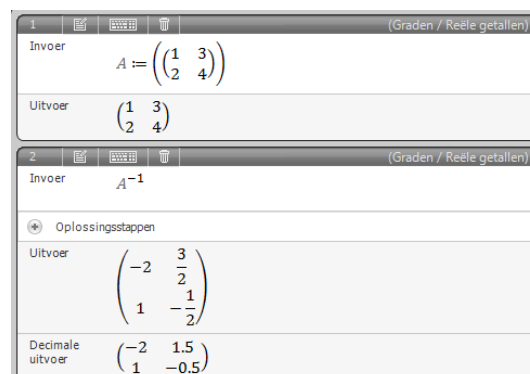
5 (Graden / Reële getallen)

Invoer  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

Uitvoer  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Decimale uitvoer  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

Geef je de matrix in met een variabele (bvb A; je kunt dit bvb doen door eerst de matrix te definiëren en daarna de knop *Store* te gebruiken uit het rekenoestel: als naam voor de variabele geef je dan A in) dan krijg je plots wel oplossingsstappen te zien:



1 (Graden / Reële getallen)

Invoer  $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Uitvoer  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

2 (Graden / Reële getallen)

Invoer  $A^{-1}$

Oplossingsstappen

Uitvoer  $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Decimale uitvoer  $\begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$

Maar het moet gezegd dat deze tussent stappen weinig verhelderend zijn.



### 3 Hulpprogramma's

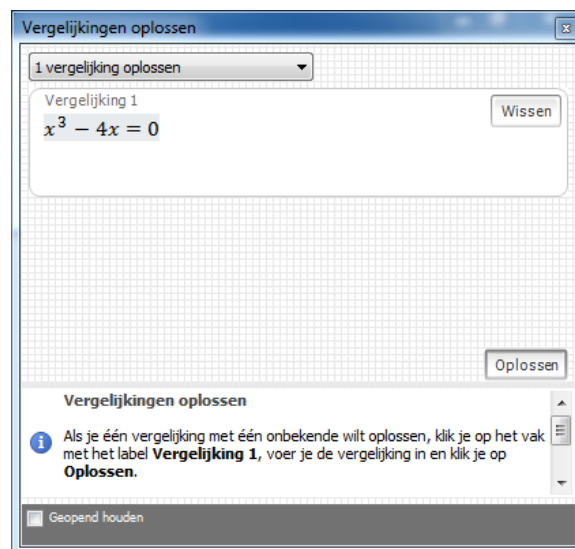
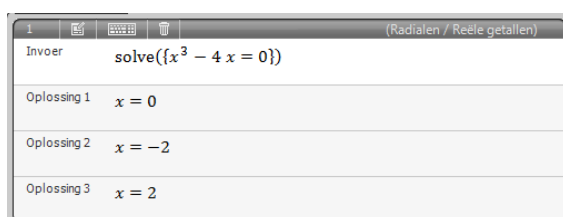
Er zijn enkele hulpprogramma's voor wiskunde voorzien in een afzonderlijke module. Die zijn te openen via de groep *Hulpprogramma's* in het lint (tab *Introductiepagina*).

#### 3.1 De module *Vergelijkingen oplossen*

Je kan eerst bovenaan kiezen of je een vergelijking wenst op te lossen, dan wel een stelsel van vergelijkingen (max 6 vergelijkingen).

Het vakje daaronder is het invoerblok, waar dus de vergelijking moet ingegeven worden.

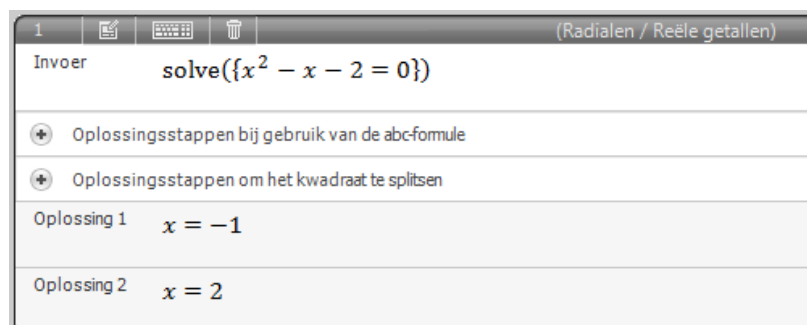
Klik tenslotte op de knop *Oplossen* en je krijgt de oplossingen te zien in het werkblad zelf.



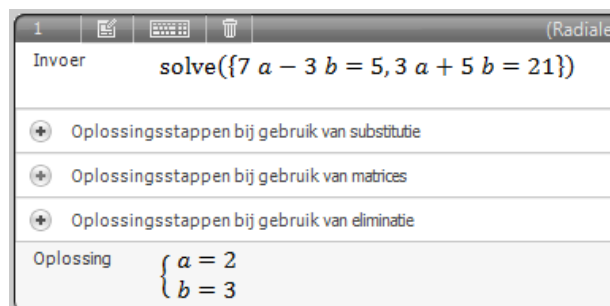
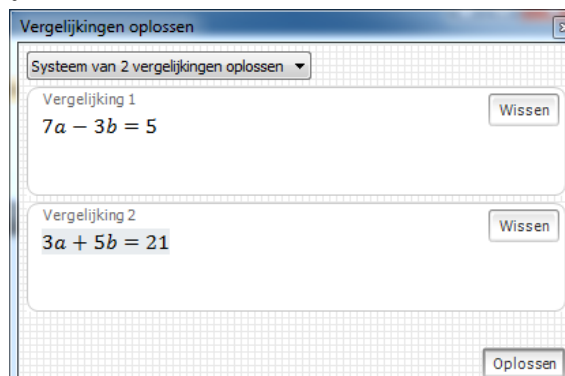
Bemerk: als je in het invoerblok van het werkblad zelf een vergelijking ingeeft en onmiddellijk klikt op *Invoeren*, dan wordt de vergelijking direct opgelost, zelfs zonder een commando in te geven voor dat oplossen. In een aantal gevallen krijg je de mogelijkheid om oplossingsstappen te bekijken, maar dit is zeker niet altijd het geval. De uitleg is ook hier dikwijls weer zeer uitgebreid en zelfs onoverzichtelijk.

*Ander voorbeelden*

•

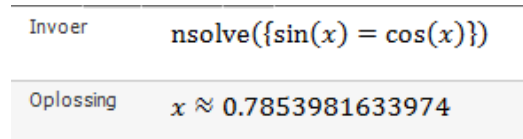
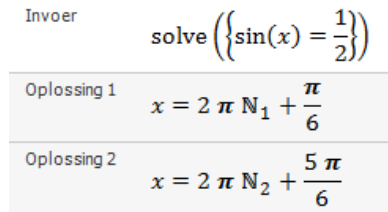
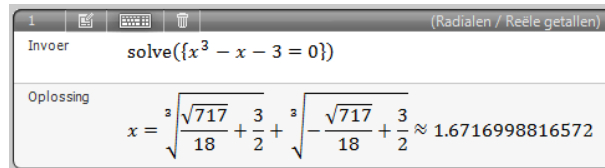
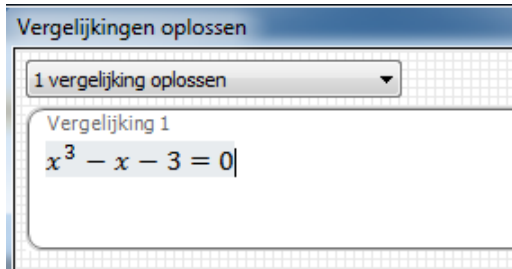


•

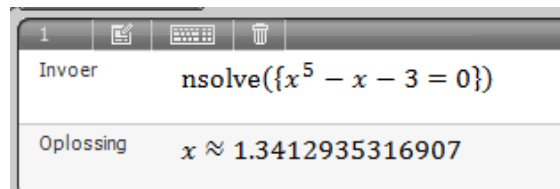
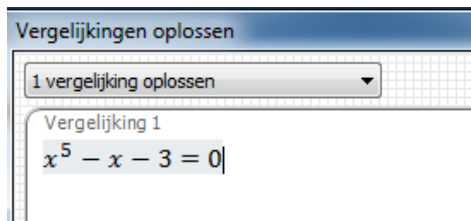


Bemerk dat ook bij het oplossen van stelsels de oplossingsstappen (te) uitgebreid zijn.

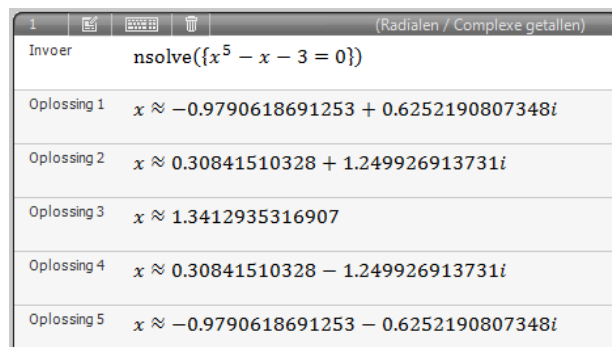
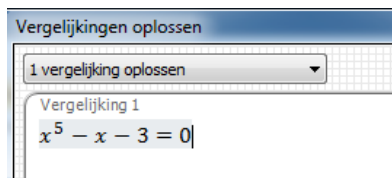
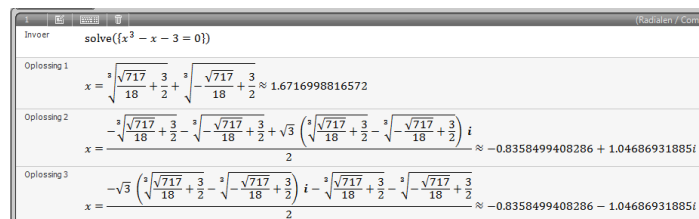
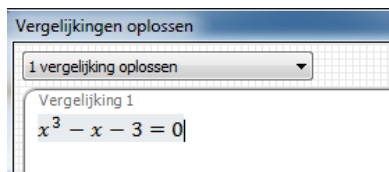
- Wiskundehulp probeert een vergelijking zo exact mogelijk op te lossen:



- Is er geen algebraïsche werkwijze om de oplossingen te vinden, dan wordt automatisch overgeschakeld naar numerieke methodes (*nsolve* in plaats van *solve* - zie ook het laatste voorbeeld hierboven bij de goniometrische vergelijking). In geval van numerieke methodes worden niet altijd alle oplossingen gegeven (zie laatste voorbeeld hierboven bij goniometrische vergelijkingen):



- Bemerk dat telkens gemakkelijk het commando te achterhalen is om zelf in het invoerblok de uitdrukking in te typen, ook voor numerieke oplossingen. Zo kan je dus in het laatste voorbeeld zelf als uitdrukking ingeven: `nsolve(x5 - x - 3 = 0)`. En ook hier volstaat het eigenlijk om alleen de vergelijking in te geven, dus:  $x^5 - x - 3 = 0$ . Wiskundehulp weet dan dat er een vergelijking moet opgelost worden, en schakelt zo nodig automatisch over op numerieke methodes.
- In de voorbeelden hierboven stond bovenaan het getalveld op "reële getallen" ingesteld. Dezelfde vergelijkingen geven de volgende oplossingen als hiervoor "complexe getallen" ingeschakeld wordt:



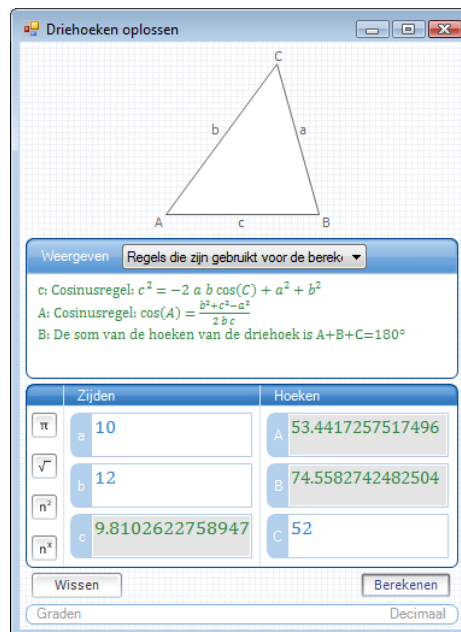
### 3.2 De module Driehoeken oplossen

Onafhankelijk van de instelling in het werkblad, kun je hier (onderaan dit venster) een hoek-eenheid kiezen, en de weergave van de resultaten instellen (exact of decimaal).

Let wel: de eenheid mag je niet zelf ook nog eens intypen.

Voor het oplossen van een driehoek geef je vervolgens de gekende elementen in (onderaan). Klik dan op *Berekenen* en de oplossingen verschijnen.

Boven de oplossingen kun je in het vakje *Weergeven* kiezen om de formules te tonen die gebruikt werden bij de oplossing, ofwel om het type driehoek te vermelden dat met de gegevens overeenkomt, ofwel om ook de hoogten en de oppervlakte van de driehoek te berekenen.



In geval de driehoek geen oplossingen heeft, dan wordt dit gemeld (neem bvb  $a = 15$ ,  $c = 10$  en  $C = 50$ ).

In geval er twee oplossingen zijn, weigert de module verder op te lossen. Er wordt dan gemeld dat er onvoldoende informatie is om de oplossing te bepalen (neem bvb  $a = 12$ ,  $c = 10$  en  $C = 50$ ).

### 3.3 Formules en vergelijkingen

Hier zit een vademecum met formules, opgesplitst in algebra, meetkunde, goniometrie, exponenten. Maar ook voor fysica en chemie staan een aantal formules, en ook een lijst met veelgebruikte constanten komt in de lijst voor.

Bij elke keuze is onderaan telkens een vakje *Geopend houden* aan te vinken. Het venster blijft dan tijdens het werken open, tot het door de gebruiker manueel zelf gesloten wordt.

Klik je op een formule, dan kun je kiezen uit drie handelingen: *Vergelijking oplossen*, *deze vergelijking in een grafiek verwerken*, *kopiëren*.

Bij *Vergelijking oplossen* kun je dan de waarden van enkele onbekenden invullen en laten oplossen naar de andere onbekende. Dit kan voor veel formules handig zijn (in de fysica bvb).

Je kan dit ook gebruiken om bvb een tweedegraadsvergelijking te laten oplossen.

Geven we bij de formule voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking waarden in voor  $a = 1$ ,  $b = -1$  en  $c = -2$ . Klik dan op de knop *Invoeren*. In het werkblad wordt dan de oplossing van de vergelijking getoond.

Je kan de vergelijking ook gebruiken om in een grafiek te verwerken. Aan de parameters worden dan waarden toegekend die te wijzigen zijn (zie verder: grafieken).

Tenslotte kan de vergelijking ook gekopieerd worden naar een tekstblok om er van daar uit mee verder te werken.

Werk je met *Constanten* dan kun je na klikken op een constante alleen kiezen om de constante te kopiëren.

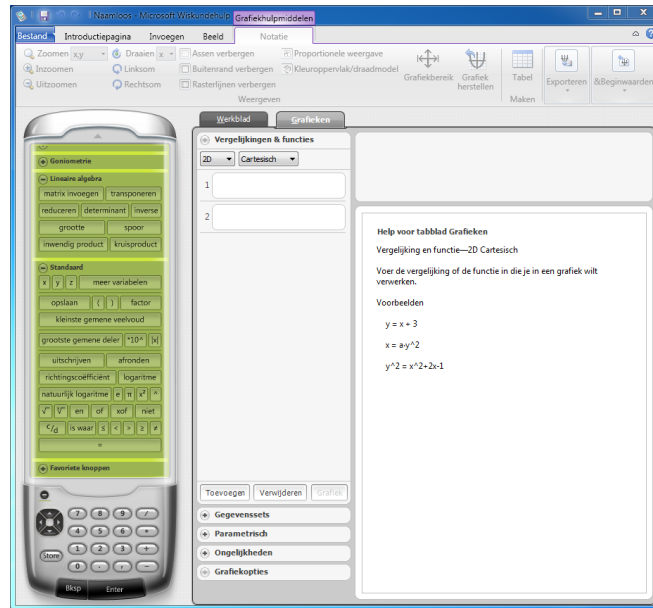
### 3.4 Eenhedenconversie

Als laatste toepassing bij *Hulpprogramma's* zit de mogelijkheid ingebouwd om conversies van eenheden door te voeren. Wil je bvb weten hoeveel cm één inch is, dan geef je eerst in dat het gaat om *Lengte*. In de kolom *van* geef je als eenheid *inch* in, en in de kolom *naar* geef je als eenheid *centimeter* in. Bij *invoer* tenslotte geef je 1 in, en klik dan op de knop *berekenen*. Je krijgt dan het antwoord: 1 inch = 2.54 cm.

## 4 Grafieken

De mogelijkheden om grafieken te tekenen, vind je in het tabblad *Grafieken*. Je kan grafieken tekenen uitgaande van de vergelijking van een functie (gedaante  $y = \dots$ ), van vergelijkingen van krommen (bv  $x^2 + y^2 = 16$ ), van parametervergelijkingen, van ongelijkheden en van gegevenssets.

Bemerk dat in het lint een extra tabblad verschijnt als je het tabblad *Grafieken* aanklikt.



### 4.1 Grafieken van vergelijkingen en functies

Grafieken van functies zijn te tekenen in 2D of in 3D, en je kunt kiezen tussen cartesische coördinaten of poolcoördinaten. Zet vooraf best de instellingen op *reële getallen* en op *radialen*.

#### 4.1.1 Een eerste voorbeeld

Beginnen we met een eenvoudig voorbeeld, het tekenen van een parabool en een rechte.



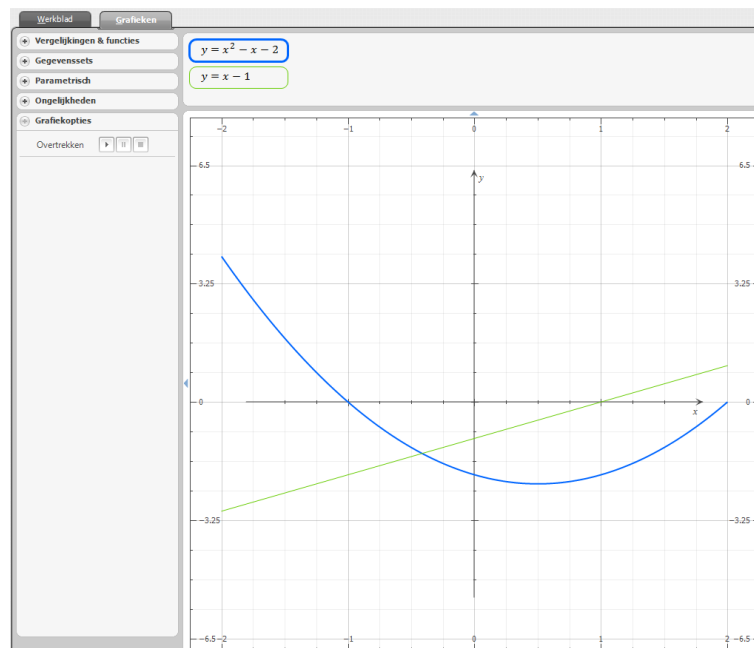
Kies eerst voor de knop *Vergelijkingen en functies*, kies daarin *2D* en *Cartesisch*.

In de invoervelden typ je de vergelijkingen in, bv van de parabool  $y = x^2 - x - 2$  en van de rechte  $y = x - 1$ . Als er meer dan twee grafieken moeten getekend worden, dan kun je grafieken toevoegen door de knop *Toevoegen* te gebruiken.

Het linkerlid ( $y =$ ) van het functievoorschrift moet niet noodzakelijk getypt worden: in dat geval zal *Wiskundehulp* zelf aanvullen met dit linkerlid.



Klik onderaan dit vakje op de knop *Grafiek*. De grafieken worden meteen getekend.



Onder *Grafiekopties* verschijnt de mogelijkheid van een kleine animatie (*overtrekken*). Dit is bedoeld om de grafiek te laten doorlopen met aanduiding van de coördinaat van het punt dat de grafiek doorloopt.



Kies boven het grafiekvenster eerst de grafiek waarvoor je de animatie wil starten.



Klik nu op de knop om de animatie te starten. Je kan natuurlijk ook de animatie pauzeren of eindigen.

In het *lint* bovenaan vind je een aantal mogelijkheden om de *opmaak van de grafiek* aan te passen.

- Je kan *assen* verbergen of weergeven (standaard worden ze weergegeven).
- Je kan de *buitenrand* verbergen of weergeven (standaard wordt ze weergegeven).
- Je kan de *rasterlijnen* verbergen of weergeven (standaard worden ze weergegeven).
- Je kan kiezen voor een *proportionele weergave*: in dat geval wordt de schaal op beide assen dezelfde genomen (bijvoorbeeld nuttig bij het tekenen van een cirkel: die wordt dan zonder vervorming weergegeven).
- Er is mogelijkheid om in- of uit te zoomen. Je kan dit bovendien doen in de richting van de x-as alleen, van de y-as alleen, of van beide assen samen. In- en uitzoomen kan ook door het muiswiel te gebruiken in het grafiekvenster.
- Via de knop *Grafiekbereik* kan je zelf instellen wat de grenzen van het grafiekvenster zijn.
- Met *Grafiek herstellen* keer je terug naar de basisweergave van de grafiek.
- Je kan de grafiek onmiddellijk opslaan als een figuur via de knop *Grafiek opslaan als afbeelding* (de formaten png, jpg, bmp, gif en emf zijn mogelijk).
- Je kan alle grafieken in één keer wissen met de knop *Tabblad grafieken wissen*.

#### Nog enkele bemerkingsen

- Als je de grafiek wil verschuiven in het grafiekvenster, gebruik dan de kleine knopjes (driehoekjes) aan de rand van het grafiekvenster.
- Als je een grafiek getekend hebt in dit tabblad *Grafieken*, dan vind je in het werkblad zelf achteraf ook een item terug met een weergave van deze grafiek.

### 4.1.2 Een functie met parameters

Je kan hier ook op een heel eenvoudige manier grafieken tekenen waarvan de coëfficiënten parameters zijn. We willen bijvoorbeeld de grafiek van  $y = a(x - p)^2 + q$  tekenen, en de betekenis van de parameters a, p en q onderzoeken.



Kies het tabblad *Grafieken*. Kies *Vergelijkingen en functies*. Vul de vergelijking  $y = a(x - p)^2 + q$  (het rechterlid volstaat ook) in het voorziene vakje van de eerste functie in, en druk op *Grafiek*

Bij *Grafiekopties* merk je dat er een extra regel is toegevoegd (*Animatie toevoegen*).

Hier kan je voor elk van de coëfficiënten a, p en q een animatie in gang brengen waarbij de parameter waarden aanneemt tussen de grenzen die rechts op deze regel voorkomen. Die grenzen zijn eenvoudig te wijzigen door in de vakjes te typen.

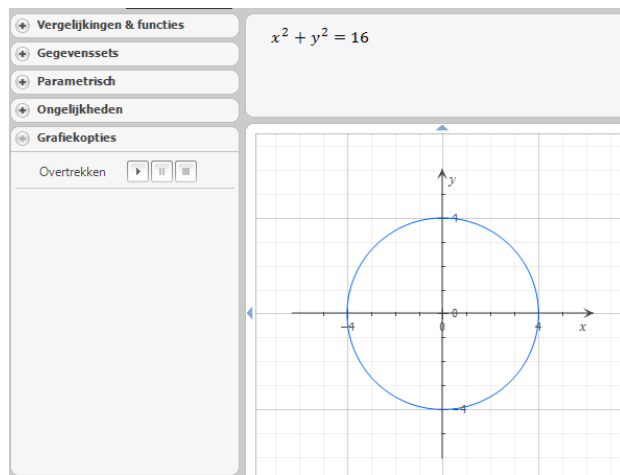
De waarden waarmee de animatie uitgevoerd wordt, variëren tussen die grenzen en wijzigen met één decimaal meer dan de grenzen zelf worden aangegeven. Geef je als grenzen voor a bijvoorbeeld in: -5 en 5, dan zal bij de animatie de parameter a alle waarden aannemen van -5.0 tot +5.0, dus met sprongetjes van 0.1



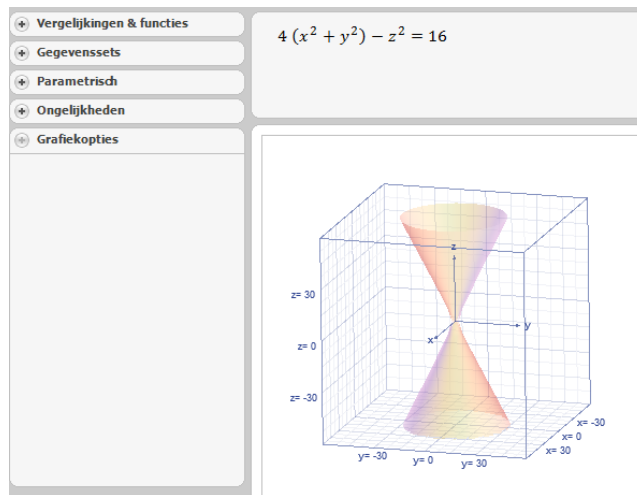
### 4.1.3 Grafieken van vergelijkingen

Alles verloopt identiek met het vorige. In plaats van een functievoorschrift in de gedaante  $y = \dots$  (of alleen het rechterlid) in te geven, geef je nu de vergelijking zelf in.

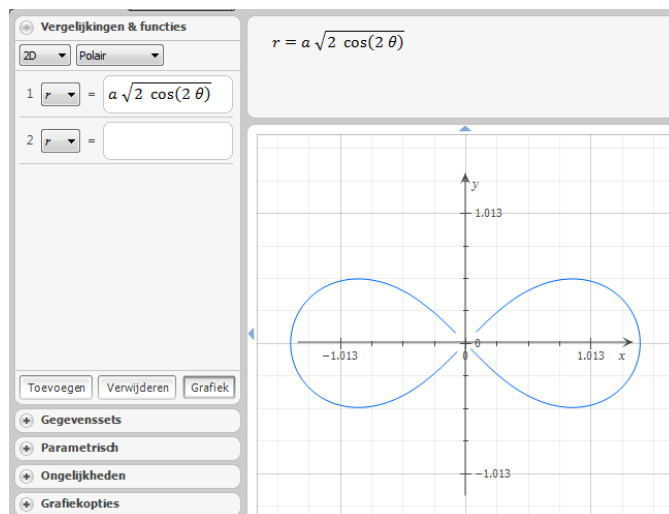
We vragen bijvoorbeeld de grafiek van de cirkel  $x^2 + y^2 = 16$ . Kies hiervoor dus weer de knop *Functies en Vergelijkingen* in de linker kolom van het tabblad *Grafieken* en geef hier de vergelijking in (in de vergelijking mogen ook weer letters voorkomen). Klik dan op de knop *Grafiek*. Een proportionele weergave is hier aan te raden:



Een voorbeeld in 3D van een omwentelingshyperboloïde (hier kan je de bekomen figuur in de ruimte roteren door de figuur te slepen met de linker muisknop ofwel door de aanduidingen in het lint te gebruiken; je kan in het lint ook kiezen tussen een *kleuroppervlak* of een *draadmodel*):



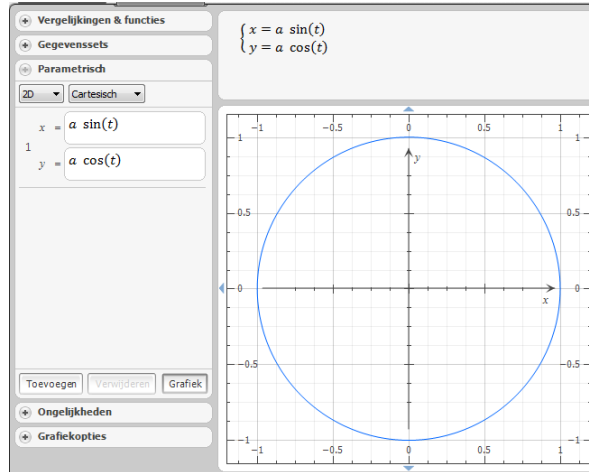
Een voorbeeld in 2D van een vergelijking in poolcoördinaten (lemniscaat van Bernoulli) (kies *Grafieken* > *Vergelijkingen en functies* en stel in op *2D* en *polair*). De Griekse letter  $\theta$  geef je in door *theta* in te typen, die wordt dan vervangen door de gepaste Griekse letter. Je kan die ook vinden in het numeriek blok bij *Standaard* > *meer variabelen*.



Je kan na het tekenen van de grafiek ook een tabel met punten van de grafiek laten weergeven door (in het lint) te klikken op *Tabel*. Je merkt dan dat de poolcoördinaat  $\theta$  varieert tussen 0 en  $2\pi$ .

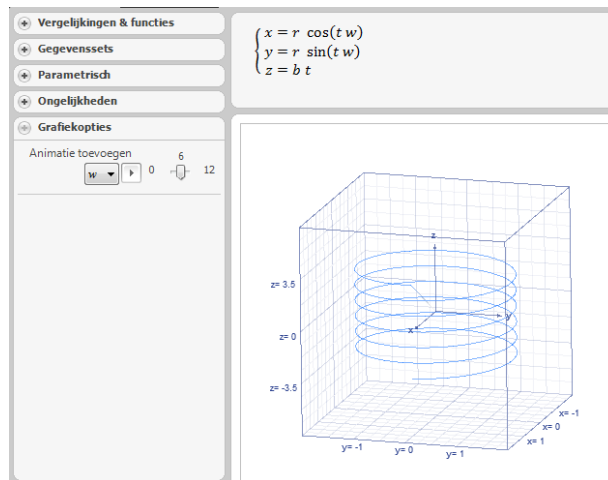
## 4.2 Grafieken van parameterkrommen

Er zijn weinig verschillen met het voorgaande. Kies nu natuurlijk de knop *Parametrisch* in de linker kolom van het tabblad *Grafieken*. Het ingeven van de kromme moet natuurlijk gebeuren volgens een aangepast voorschrift (en in de vergelijking mogen ook weer letters voorkomen). Als parameter zelf moet de letter  $t$  gebruikt worden; deze varieert van  $-\pi$  tot  $+\pi$ . Voor een cirkel met straal  $a$  in parametervergelijking krijgen we bijvoorbeeld:

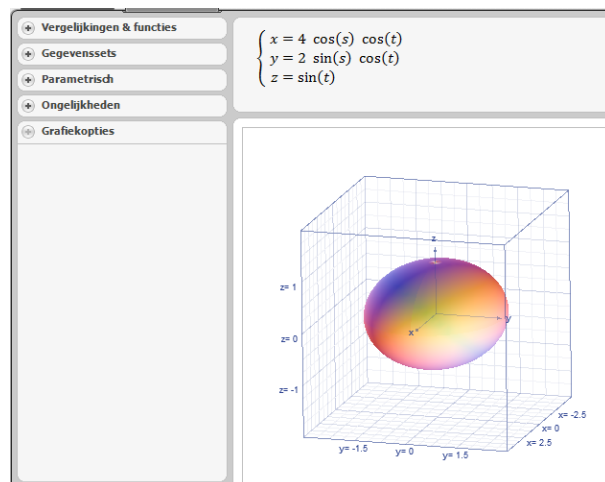


Ook nu kan weer een tabel met punten van de grafiek opgevraagd worden.

Voorbeeld in 3D (3D, cartesisch, curve; resultaat is hier een schroeflijn):

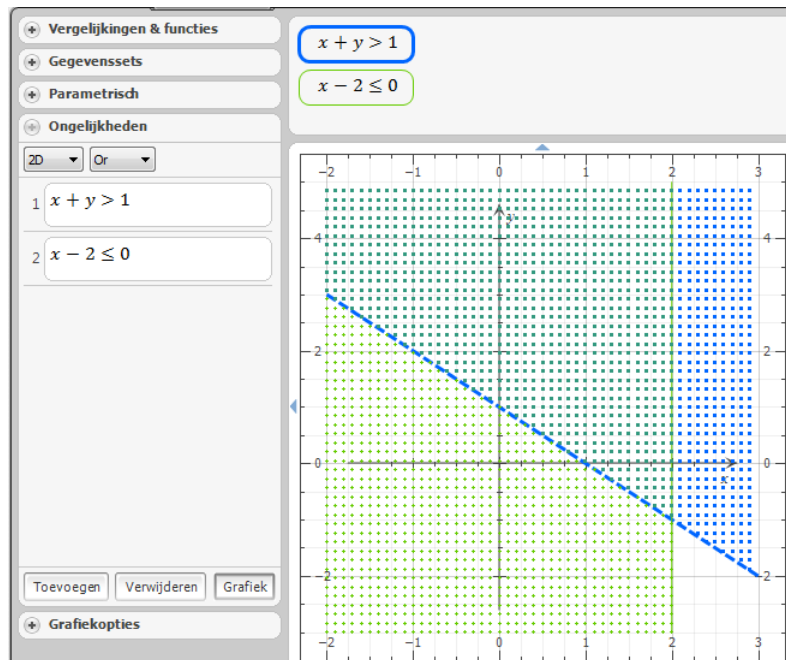


Voorbeeld in 3D (3D, cartesisch, oppervlak; resultaat is hier een ellipsoïde):



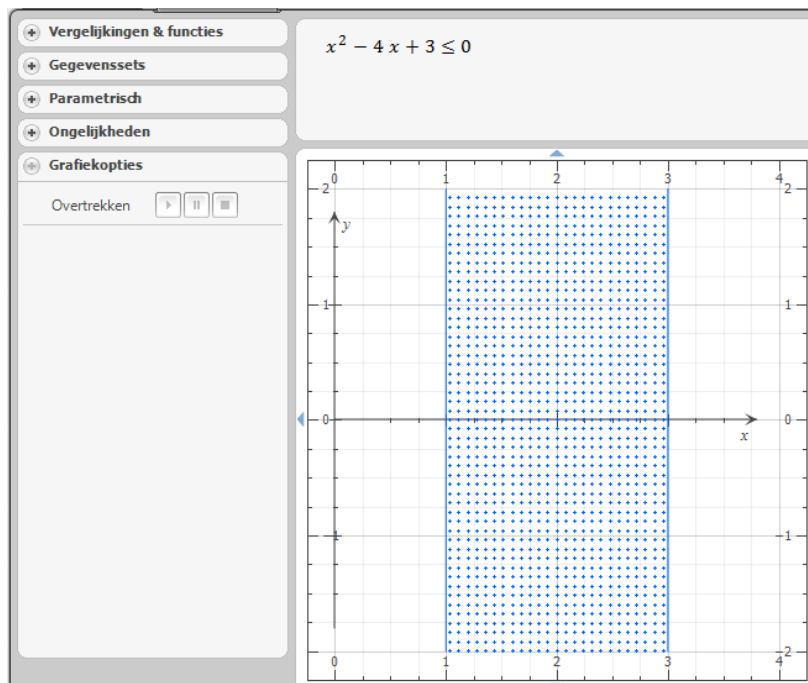
### 4.3 Grafieken van ongelijkheden

Hier krijg je een grafische weergave van de oplossingen van ongelijkheden. Bijvoorbeeld:



De oplossingen worden getoond in gearceerde gebieden. Als de rand niet behoort tot het oplossingsgebied, dan wordt die in stippellijn getekend; anders in volle lijn. Bij het ingeven van meerdere ongelijkheden kun je kiezen tussen "or" of "and".

Ook ongelijkheden met één onbekende zijn in te geven. Bijvoorbeeld:





## 5 Lineaire algebra

Voor het rekenen met matrices en determinanten gebruiken we weer het werkblad, en klikken we in het numeriek blok op *Lineaire algebra*.



Klik op de knop *Matrix invoegen* om een matrix in te geven.

Het aantal rijen en kolommen kan eerst ingegeven worden, vervolgens de elementen zelf (in het invoerblok). Je mag ook letters ingeven voor de elementen van een matrix. Om van het ene element naar het andere te springen met de cursor, kun je de pijltjestoetsen gebruiken.

Het kan handig zijn om de matrix meteen toe te wijzen aan een variabele, bvb A.

Druk daarvoor op de knop *Store* en geef als naam A.

The first screenshot shows a text input field containing the matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A$ . To the right are buttons for 'Wissen' and 'Invoeren'.

The second screenshot shows a text input field containing the matrix  $B := \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ . To the right are buttons for 'Wissen' and 'Invoeren'.

De namen van deze variabelen kunnen om het even welke letter zijn, of een letter gevolgd door 1 of 2 cijfers. Ook Griekse letters zijn mogelijk. Je kunt die vinden in het numeriek blok bij de knop *meer variabelen* van de groep *Standaard*.

Het toewijzen aan een variabele kan ook anders dan met de knop *Store*. Je kunt ook

- de naam van de variabele typen gevolgd door :=  
(in het voorbeeld dus:  $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ )
- eerst de inhoud typen en dan  $\rightarrow$  gevolgd door de naam van de variabele  
(in het voorbeeld dus:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A$ )

The screenshot shows a window titled '(Radialen / Reële getallen)'. In the 'Invoer' field, the text is  $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . The 'Uitvoer' field shows the same matrix:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

The screenshot shows a window titled '(Radialen / Reële getallen)'. In the 'Invoer' field, the text is  $B := \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ . The 'Uitvoer' field shows the same matrix:  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ .

Een lijst met de gemaakte variabelen kun je raadplegen via de knop *Opgeslagen variabelen* in de groep *Weergeven* van de tab *Beeld* uit het lint. In die lijst kun je variabelen allemaal in een keer wissen via de knop *Alles wissen*. Je kan ook één variabele wissen door het knopje *Wissen* te gebruiken rechts van de naam van de variabele, maar door een of andere bug blijkt dit knopje niet altijd aanwezig...

Een aantal berekeningen met matrices kunnen nu onmiddellijk doorgevoerd worden via de voorziene knoppen in de module *Lineaire algebra*. We werken zo veel mogelijk met de variabelen waar de matrices in onder gebracht zijn. Bijvoorbeeld:

- canonieke vorm van de matrix weergeven (knop *reduceren*)

3 (Radialen / Reële getallen)

Invoer: `reduce(A)`

Uitvoer: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

Decimale uitvoer: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.7857142857143 \\ 0 & 1 & 0 & 0.7142857142857 \\ 0 & 0 & 1 & -1.2857142857143 \end{pmatrix}$$

- de getransponeerde matrix weergeven (knop *transponeren*)

4 (Radialen / Reële getallen)

Invoer: `transpose(A)`

Uitvoer: 
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- de determinant van de matrix berekenen (knop *determinant*)

5 (Radialen / Reële getallen)

Invoer: `det(B)`

Uitvoer:  $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$

- de inverse matrix berekenen (knop *inverse*)

6 (Radialen / Reële getallen)

Invoer: `inverse(B)`

Uitvoer: 
$$\begin{pmatrix} \frac{a^2 - bc}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} & \frac{c^2 - ab}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} & \frac{b^2 - ac}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} \\ \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{b^2 - ac} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{a^2 - bc} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{c^2 - ab} \\ \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{c^2 - ab} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{b^2 - ac} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{a^2 - bc} \end{pmatrix}, -3abc + a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$$

Decimale uitvoer: 
$$\begin{pmatrix} \frac{a^2 - bc}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} & \frac{c^2 - ab}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} & \frac{b^2 - ac}{a^3 - 3abc + b^3 + c^3} \\ \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{b^2 - ac} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{a^2 - bc} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{c^2 - ab} \\ \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{c^2 - ab} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{b^2 - ac} & \frac{a^3 - 3abc + b^3 + c^3}{a^2 - bc} \end{pmatrix}$$

Er is ook een knop om het spoor (*spoor*) van een matrix te berekenen, en een knop om de dimensie (*grootte*, het aantal rijen en kolommen) van een matrix te bepalen.

In dezelfde module voor *Lineaire algebra* zit ook een knop voor het berekenen van het **scalair product van 2 vectoren** (*inwendig product*) en voor het berekenen van het **vectorieel product van twee vectoren** (*kruisproduct*). De vectoren moeten ingegeven worden tussen accolades, dus precies zoals de coördinaten van een punt:

Invoer: `inner({-1, 2}, {0, 5})`

Uitvoer: **10**

Invoer: `cross({1, 0, 0}, {0, 1, 0})`

Uitvoer: **{0, 0, 1}**

## 6 Statistiek en kansrekenen



Open in het numeriek blok de module *Statistiek*

### 6.1 Ingeven van lijsten van gegevens

Statistische berekeningen gebeuren op lijsten. Zoals eerder al vermeld, kunnen de elementen van een lijst gewone getallen zijn of zelf ook lijsten (die dan wel allemaal evenveel elementen moeten bevatten):

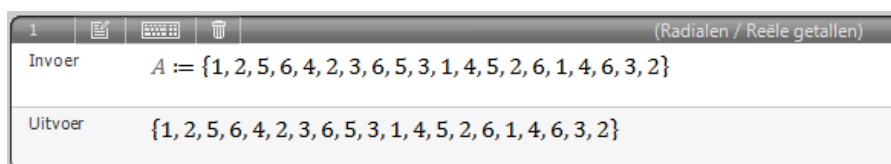
$\{5,1,2,6,5,3,1,2,5,6,3,6,4,2,1,5,6,3,5\}$

of  $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{3,5,6\},\{4,5,1\}\}$

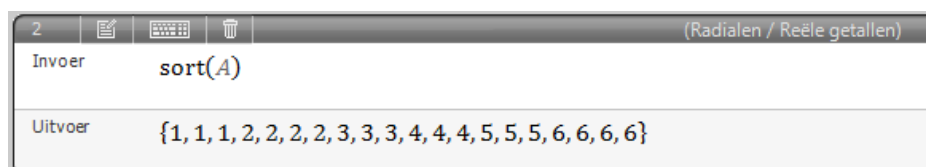
Om lijsten in te brengen, gebruik je de knop *Gegevensset invoegen*. Je kan ze natuurlijk ook rechtstreeks intypen in het invoervenster.

In het venstertje dat volgt, typ je de getallen (of lijsten) in. Het is ook mogelijk om een reeks gegevens vanuit bv Excel te kopiëren en hier te plakken. Bij het begin staan er 20 rijen in het venster, maar dit wordt onmiddellijk uitgebreid als deze rijen opgevuld zijn.

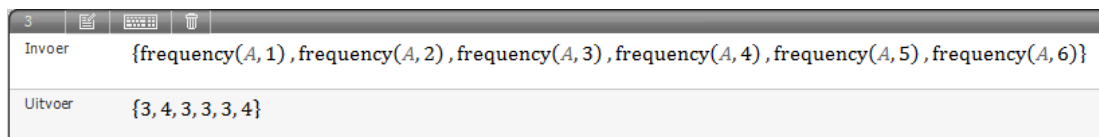
Als de lijst klaar is, klik je op de knop OK. Het is dan dikwijls nuttig om in het invoerblok deze lijst van een naam (variabele) te voorzien.



Als een lijst ingegeven is, dan kan die lijst ook gesorteerd worden; gebruik hiervoor de knop *sorteren* en geef als argument de lijst in (of de naam van de lijst).



Het is ook mogelijk (met de functie *frequency* waar geen knop voor bestaat) om te laten tellen hoeveel keer een element in de lijst voorkomt (in het voorbeeld is deze functie *frequency* ook in een lijst gestopt om voor elke waarde van de lijst A de frequentie te tellen):



Het is bij deze gegevenslijsten niet mogelijk om waarnemingsgetallen in te vullen samen met de frequentie waarmee de getallen voorkomen. Iets wat wel kan bij andere statistische programma's, en ook bij de grafische rekentoestellen.

### 6.2 Statistische berekeningen

De berekeningen voor het gemiddelde, mediaan, modus, variantie, standaardafwijking, maximum, minimum ... gebeuren op lijsten.

## 6.2.1 Voorbeeld

We werken een kort voorbeeld uit. We gooien 10 keer na elkaar twee dobbelstenen, en maken de som van de ogen van de beide dobbelstenen. Van die som zoeken we dan de gebruikelijke statistische grootheden (centrum- en spreidingsmaten).

Voor het ingeven van het gooien van 2 dobbelstenen maken we 2 lijsten A (resultaten eerste dobbelsteen) en B (resultaten tweede dobbelsteen).

We kunnen zelf telkens 10 getallen tussen 1 en 6 ingeven, maar we kunnen die getallen ook random laten bepalen.

De functie *willekeurig* die op het numeriek blok voorkomt, heeft als argument een geheel getal  $x$  en resulteert in een willekeurig geheel getal tussen 0 en dat getal  $x$ .

Om gehele getallen te krijgen tussen 1 en 6, kunnen we de volgende functie bouwen:  $\text{round}(\text{random}(5)+0.5)$ . De term  $+ 0.5$  is nodig om de waarde 0 niet te krijgen en de waarde 6 natuurlijk wel.

Bij *Gegevensset invoegen* maken we dus twee lijsten van 10 elementen, allemaal bestaande uit bovenstaande functie. De eerste lijst noemen we A (worpen van de eerste dobbelsteen), de tweede lijst noemen we B (worpen van de tweede dobbelsteen).



Kies in het numeriek blok voor *Gegevensset invoegen*



In het eerste veld typ je in:  $\text{round}(\text{random}(5)+0.5)$

Kopieer dit een aantal keer in de volgende velden, tot er 10 velden identiek opgevuld zijn.

(Een bug in het programma verhindert blijkbaar dit kopiëren en plakken; je kan het oplossen door dit eerst in Excel in te typen (daar kun je wel kopiëren) en dan de 10 rijen in een keer te kopiëren in de gegevensset: dit kopiëren lukt blijkbaar wel, ofwel door rechtstreeks te typen in het invoervenster, daar kan je wel kopiëren.)



Klik op OK; de lijst komt in het invoerblok



Kies de knop *store* in het numeriek blok, en wijs de lijst toe aan de variabele A



Klik op de knop *Invoeren*; in het werkblad komt er:

(Graden / Reële getallen)	
Invoer	$A := \{\text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5)\}$
Uitvoer	{6, 6, 5, 5, 6, 5, 1, 1, 5, 3}



Klik nu met de rechter muisknop boven op de invoerregel van dit eerste resultaatvenster, en kies *Naar invoer kopiëren* (of gebruik het daartoe voorziene knopje).

Zo wordt de invoerregel meteen naar het invoerblok gekopieerd en moeten we de tweede lijst niet opnieuw van voor af aan maken.



Vervang vooraan de naam van de variabele door B en klik weer op de knop *Invoeren*

(Graden / Reële getallen)	
Invoer	$B := \{\text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5), \text{round}(\text{random}(5) + 0.5)\}$
Uitvoer	{6, 6, 2, 4, 2, 6, 2, 3, 4, 1}



In het invoerblok typen we dan zelf het commando voor het maken van een derde lijst C, die de som van de corresponderende getallen uit A en B zal bevatten:  $C := A + B$

Deze laatste lijst C bevat dus de sommen van de ogen bij het opgooien van de twee dobbelstenen A en B. Zoals eerder al vermeld is het mogelijk deze lijst te sorteren (knop *sorteren*), het grootste element of het kleinste element te zoeken (knoppen *max*, *min*), de som of het product te maken van al deze elementen (*som*, *product*).

(Graden / Reële getallen)	
Invoer	$C := A + B$
Uitvoer	{12, 12, 7, 9, 8, 11, 3, 4, 9, 4}

Op deze lijst C laten we nu een aantal statistische berekeningen doorvoeren. Bijvoorbeeld:

het (rekenkundig) gemiddelde

Invoer	mean(C)
Uitvoer	$\frac{89}{10}$
Decimale uitvoer	8.9

de mediaan

Invoer	median(C)
Uitvoer	$\frac{17}{2}$
Decimale uitvoer	8.5

de modus

Invoer	mode(C)
Uitvoer	{9, 12, 8}

de standaarddeviatie (standaardafwijking)

Invoer	stdDev(C)
Uitvoer	$\frac{\sqrt{649}}{10}$
Decimale uitvoer	2.5475478405714

geometrisch (meetkundig) gemiddelde)

Invoer	geometricMean(C)
Uitvoer	$2^{10}\sqrt[10]{1990170}$
Decimale uitvoer	8.5294104359461

variantie

Invoer	variance(C)
Uitvoer	$\frac{649}{100}$
Decimale uitvoer	6.49

Wat er wel ontbreekt is een grafische weergave van deze waarnemingsgetallen.

## 6.3 Kansrekenen

Ook voor kansrekenen zijn de nodige commando's voorzien.

- de knop **!**: berekening van de faculteit van een getal.  
Bijvoorbeeld 5!:

Invoer	5!
Uitvoer	120

- de knop *combinatie*: berekening van het aantal manieren waarop uit een verzameling van n elementen er p kunnen gekozen worden (volgorde niet van belang).  
Bijvoorbeeld  $C_{10}^3$ :

Invoer	combination(10, 3)
Uitvoer	120

- de knop *permutatie*: berekening van het aantal manieren waarop uit een verzameling van n elementen er p kunnen gekozen worden (volgorde wel van belang).  
Bijvoorbeeld  $V_{10}^3$ :

Invoer	permutation(10, 3)
Uitvoer	720

Of  $P_5$ :

Invoer	permutation(5, 5)
Uitvoer	120

## 7 Analyse



Open in het numeriek blok de module *Calculus*

De belangrijkste berekeningen voor de analyse van de secundaire scholen zijn voorzien. Het symbool voor  $\infty$  kan met een knop in deze module getypt worden. In plaats van het symbool  $\infty$  kan ook het woord *infinity* ingetypt worden (best gevolgd door een spatie). Zet ook de hoekeenheid op *radialen*, dit is nodig voor limieten van goniometrische functies.

### 7.1 Limietberekeningen

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

Uitvoer 2

Invoer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2 - x^2}{x} \right)$

Uitvoer  $-\infty$

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( (2x - 3)^{\frac{1}{3x-6}} \right)$

Uitvoer  $\frac{2}{e^3}$

Decimale uitvoer 1.9477340410547

Invoer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(x))$

Uitvoer *Indeterminate*

Invoer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 2}{x - 2} \right)$

Uitvoer 1

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \sin(x)}}{2x} \right)$

Uitvoer  $\frac{1}{4}$

Decimale uitvoer 0.25

Invoer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (\ln(x))^{\frac{1}{x}} \right)$

Uitvoer 1

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \sin(x)}{e^x - x - 1} \right)$

Uitvoer 2

In het eerste voorbeeld van de laatste rij bestaat de limiet niet: *Indeterminate* (onbepaald) is dus eigenlijk niet een goed antwoord. In het laatste voorbeeld typ je in de teller tussen  $x$  en  $\sin(x)$  best een productteken (te halen uit het rekentoestel). Anders wordt "xsin" als de naam van een functie beschouwd, wat zinloos is natuurlijk. Ook het getal  $e$  typ je niet zelf, maar haal je uit het rekentoestel (numeriek blok onderaan).

Bij limieten die als uitkomst oneindig geven als  $x \rightarrow a$ , wordt de uitkomst vermeld als *Indeterminate* (letterlijk vertaald: "onbepaald", wat eigenlijk niet juist is), ook als de uitkomst wel degelijk bestaat. We moeten in die gevallen dus zelf de uitkomst ( $\infty$ ) en het teken van dit oneindig bepalen:

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x + 2}{x - 2} \right)$

Uitvoer *Indeterminate*

Invoer  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x + 2}{(x - 2)^2} \right)$

Uitvoer *Indeterminate*

Ook bij complexere opgaven verslikt *Wiskundehulp* zich wel eens in de berekening, en geeft dan bijvoorbeeld *Indeterminate*, terwijl er wel een uitkomst bestaat. Het kan zelfs gebeuren dat de berekening in een oneindige lus verzeild geraakt, en dus ook geen uitkomst geeft. Er is geen menu-onderdeel om de berekening zelf stop te zetten (in de vorige versie 3 van het programma kon dit wel). Door dan te klikken op bvb de tab *Grafieken* merkt het programma dan wel zelf het probleem op en vraagt of de berekening niet moet stopgezet worden.

Bijvoorbeeld bij

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(x+1)^{x+1}}$$

## 7.2 Afgeleiden

Er is een knop voorzien voor de eerste en voor de tweede afgeleide. Voor hogere afgeleiden kan zelf een commando ingetypt worden: *derivn(f,x,n)*. De berekeningen verlopen hier correct, ook voor complexere afgeleiden:

Invoer	$\frac{d}{dx}(x \ln(x) - x)$	Invoer	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(2x))$	Invoer	$\frac{d}{dx}(x^2 x)$
Uitvoer	$\ln(x)$	Uitvoer	$\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	Uitvoer	$(2 \ln(x) + 2) x^2 x$
Invoer	$\frac{d}{dx}(e^{-x^2})$	Invoer	$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	Invoer	$\frac{d^4}{dx^4}(\sin(2x))$
Uitvoer	$-\frac{2x}{e^{x^2}}$	Uitvoer	$\frac{4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$	Uitvoer	$16 \sin(2x)$

De laatste afgeleide is ingegeven als *derivn(sin(2x),x,4)*

## 7.3 Onbepaalde integralen

Ook hiervoor is een afzonderlijke knop voorzien.

Invoer	$\int x^3 - 3x + 2 dx$	Invoer	$\int e^x \sin(x) dx$
Uitvoer	$\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$	Uitvoer	$\frac{\sin(x) e^x}{2} - \frac{\cos(x) e^x}{2} + C$
Invoer	$\int \frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$	Invoer	$\int \tan^{-1}(x) dx$
Uitvoer	$\frac{(\sin^{-1}(x))^2}{2} + C$	Uitvoer	$x \tan^{-1}(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$
Invoer	$\int \frac{x+1}{3x-2} dx$		
Uitvoer	$\frac{5 \ln\left(\left \frac{6-9x}{5}\right \right)}{9} + \frac{x}{3} + \frac{4}{9} + C$		

Vrij vlug, zelfs bij relatief eenvoudige opgaven, vindt *Wiskundehulp* de primitieve functie niet. De opgave wordt dan teruggegeven als antwoord. Bijvoorbeeld:

Invoer	$\int \ln(x^2 + 1) dx$
Uitvoer	$\int \ln(x^2 + 1) dx$

Invoer	$\int \sin(3x) \cos(2x) dx$
Uitvoer	$\int \sin(3x) \cos(2x) dx$

Invoer	$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1} dx$
Uitvoer	$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1} dx$

## 7.4 Bepaalde integraal

Invoer	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x) dx$
Uitvoer	$2\sqrt{2}$
Decimale uitvoer	2.8284271247462

Invoer	$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$
Uitvoer	$3 - \sqrt{5}$
Decimale uitvoer	0.7639320225002

Invoer	$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$
Uitvoer	$\frac{\pi}{2}$
Decimale uitvoer	1.5707963267949

Ook hier geven de bepaalde integralen dikwijls geen uitkomst. Jammer is ook dat er geen mogelijkheid bestaat om deze bepaalde integralen grafisch voor te stellen.

## 7.5 Sommen (reeksen) berekenen

In de module *Analyse* zit ook een knop  $\Sigma$  om sommen te berekenen (en een knop  $\prod$  om producten te berekenen). Bijvoorbeeld:

Invoer	$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{2^n}$
Uitvoer	$\frac{1048575}{1048576}$
Decimale uitvoer	0.9999990463257



## 8 De invoegtoepassing *Microsoft Math*

Zoals in de inleiding al vermeld: er bestaat een invoegtoepassing voor MS-Word met de naam *Wiskundehulp invoegtoepassing* of *Microsoft Mathematics Add-in* die toelaat om wiskundige uitdrukkingen (gemaakt met de nieuwe vergelijkingseditor in Word 2007/2010) automatisch te laten berekenen in de tekstverwerker zelf. Deze invoegtoepassing is gebaseerd op het programma *Microsoft Mathematics/Microsoft wiskundehulp*. Maar dit laatste programma hoeft niet geïnstalleerd te zijn om de invoegtoepassing te gebruiken (de invoegtoepassing moet natuurlijk wel geïnstalleerd zijn).

Na installatie van de invoegtoepassing krijg je bovenaan in het scherm van Word een tab met de naam *Wiskunde*:



Klik je hier op, dan zie je de mogelijkheid om een wiskundetext te typen met de vergelijkingseditor van Word, en ook enkele instellingen die te regelen zijn precies zoals in het programma *Wiskundehulp* zelf.

Er zit ook een knop *Berekenen* bij: het is die knop die toelaat om een ingevuld wiskunde-item effectief te laten uitrekenen.

Er zit ook een knop *Grafiek* bij om van wiskundige uitdrukkingen een grafiek te laten tekenen.

Beide mogelijkheden heb je ook als je met de rechter muisknop (RMK) klikt op een getypte formule, zoals we direct in een aantal voorbeelden zullen laten zien.

### 8.1 Berekeningen maken

#### 8.1.1 Numerieke berekeningen



Geef de volgende uitdrukking in (met de editor van MS Office 2007/2010):

$$3500 \cdot 1.04^{12}$$



Klik met de rechter muisknop op deze formule en kies *Berekenen > Berekenen* (in plaats van te klikken met de RMK kun je ook in het lint bovenaan de tab *Wiskunde* kiezen en daarin de knop *Berekenen > Berekenen*).

Je krijgt dan het volgende:

$$3500 \cdot 1.04^{12}$$

$$5603.612764986882765357056$$

De uitkomst van een berekening wordt altijd als een nieuwe formule op een volgende alinea geplaatst. Wil je de uitkomst liever op dezelfde regel, doe dan het volgende.



Typ een =-teken achter de eerste regel (in het formulegebied!) en druk dan op de toets *Delete*. Je krijgt dan:

$$3500 \cdot 1.04^{12} = 5603.612764986882765357056$$

#### 8.1.2 Berekeningen met breuken



Geef de volgende uitdrukking in:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2+5} - 2 =$$



Klik met de RMK in de uitdrukking en kies weer *Berekenen* > *Berekenen*. Dit geeft:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2+5} - 2 = -\frac{15}{28}$$



Plaats de invoegpositie juist achter het gelijkheidsteken en klik op de toets *Delete*. Dit geeft:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2+5} - 2 = -\frac{15}{28}$$

Het enige verschil met het vorige voorbeeld is dat we nu het =-teken al onmiddellijk in de "opgave" hebben getypt.

### 8.1.3 Goniometrische, logaritmische en andere standaard functies

Die worden op dezelfde manier ingegeven als in *Wiskundehulp*.

- Plaats de hoekeenheid op graden:  $\sin 30 + \cos 45 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$
- $\tan 50 = 1.1917535925942$  (ook het aantal cijfers na de komma kan je weer instellen)
- $\log 100 = 2$
- $\log_2 8 = 3$
- Plaats de hoekeenheid op radialen:  $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
- $10! = 3628800$

## 8.2 Oplossen van vergelijkingen

Geef je een vergelijking in met de editor, dan kun je die vergelijking meteen laten oplossen.

### 8.2.1 Vergelijking met één onbekende



Voer de volgende vergelijking in:

$$x^3 - 3x^2 + x = 0$$



Klik met de RMK op de vergelijking, en kies *Berekenen* > *Oplossen voor x*. Er komt:

$$x^3 - 3x^2 + x = 0$$

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

Je kan dit eventueel omvormen tot (de dubbele pijl kan ingegeven worden als  $\Leftrightarrow$  en verder werk je zoals in de vorige voorbeelden bij berekeningen):

$$x^3 - 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } x = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$$

### 8.2.2 Vergelijking met meerdere onbekenden



Geef de volgende vergelijking in:

$$K = k(1 + p)^n$$



Klik met de RMK op de vergelijking, kies *Berekenen* > *Oplossen* > en kies dan achtereenvolgens voor een oplossing

- naar p:

$$K = k(1 + p)^n \Leftrightarrow p = \left(\frac{K}{k}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

- naar n:

$$K = k(1 + p)^n \Leftrightarrow n = \log_{p+1} \left(\frac{K}{k}\right)$$

- naar k:

$$K = k(1 + p)^n \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{K}{(p + 1)^n}, & -(1 + p)^n \neq 0 \\ \emptyset, & -(1 + p)^n = 0 \text{ and } K \neq 0 \\ k \in \mathbb{R}, & K = 0 \text{ and } -(1 + p)^n = 0 \end{cases}$$

## 8.3 Grafieken

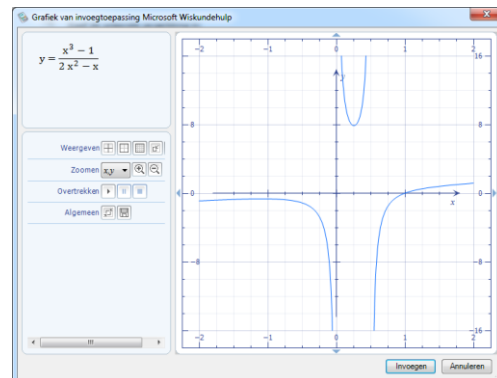
### 8.3.1 Een functie plotten



Voer de volgende uitdrukking in:  $\frac{x^3-1}{2x^2-x}$



Klik met de RMK op de formule en kies *Grafiek* > *Verwerken in 2D* (of kies in het lint bovenaan de tab *Wiskunde* en daarin de knop *Grafiek*). Dit geeft eerst een dialogkader:



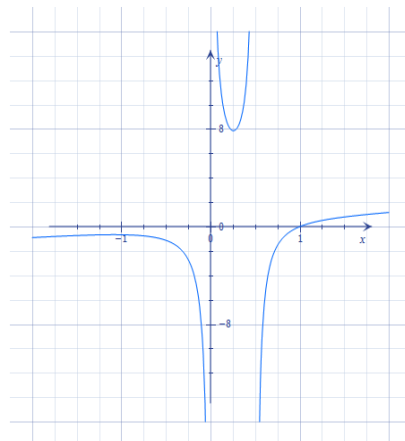
Je merkt de grote gelijkenissen met de grafieken in *Wiskundehulp*. Alleen komen de knoppen voor het instellen van een en ander op een andere plaats voor.



Klik bijvoorbeeld achter *Weergeven* op de tweede knop (dit schakelt de omkadering met schaalverdeling uit, en plaatst de maatgetallen bij de assen zelf.



Klik dan op de knop *Invoegen*. De grafiek wordt dan in het Worddocument geplaatst, zoals hieronder:



Wil je nadien nog aan de grafiek wijzigen, dan kun je dubbel klikken op de grafiek. Je krijgt dan het dialoogkader opnieuw.

Je kan ook de grafiek doen tekenen van

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x}$$

Maar dan moet je eerst het rechter deel van de vergelijking selecteren, anders wordt de formule geïnterpreteerd als een vergelijking en niet als een functie (bij een vergelijking worden dan de oplossingen geplot).

### 8.3.2 De twee leden van een vergelijking plotten



Voer de volgende vergelijking in:

$$x^4 - x^3 - 10x^2 = -2x - 7$$



Klik met de RMK op de vergelijking en kies *Grafiek > Beide zijden in 2D-grafiek verwerken*

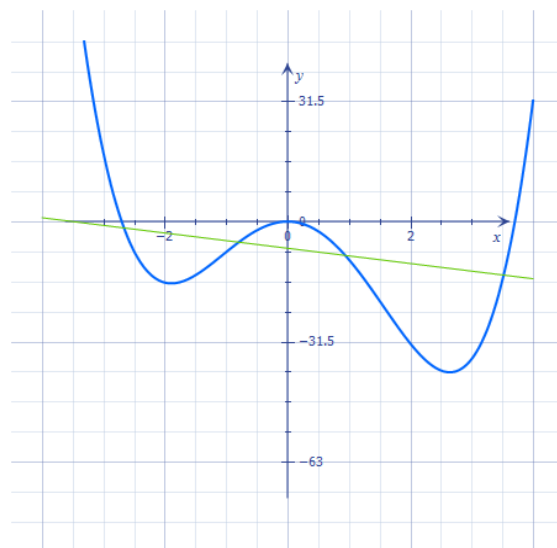


In het dialoogkader stel je de maatgetallen bij de assen, en je zoomt eventueel wat uit.



Klik op de knop *Invoegen*. De grafiek verschijnt.

$$x^4 - x^3 - 10x^2 = -2x - 7$$



Op de grafiek kan je zien dat er 4 snijpunten zijn.



Klik met de RMK op de vergelijking, en kies *Berekenen > Oplossen voor x*

Dit geeft de volgende benaderde oplossing:

$$x \approx -0.7944043282285 \text{ of } x \approx -2.664597612627 \text{ of } x \approx 0.9396381537302 \text{ of } x \approx 3.5193637871253$$

Dat we hier een benadering krijgen van alle oplossingen is alleen omdat we te maken hebben met een veeltermvergelijking. Bij andere vergelijkingen is dat niet zo, maar krijg je enkel een benadering van één van de oplossingen. Bijvoorbeeld:

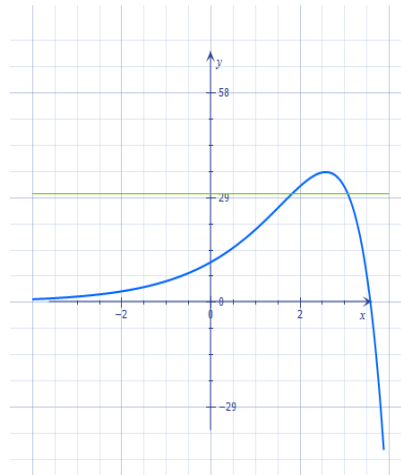
$$12 \cdot 2^x - 4^x = 30$$



Klik met de RMK e, kies *Berekenen > Oplossen voor x*, dan geeft dit één oplossing:

$$x \approx 1.8280263746614$$

Hoewel de vergelijking er twee heeft, wat blijkt als je de beide leden van de vergelijking laat plotten:



### 8.3.3 Een vergelijking in x en y



Voer de volgende vergelijking in:

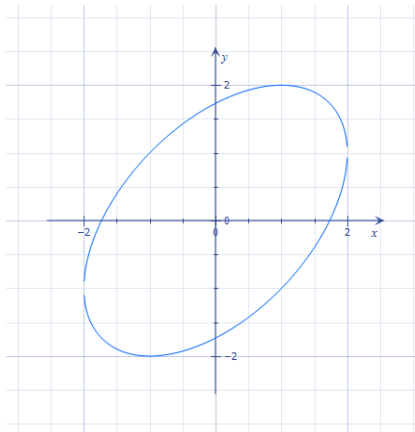
$$x^2 + y^2 = xy + 3$$



Klik met de RMK op de vergelijking en kies *Grafiek > Verwerken in 2D*



Plaats de maatgetallen bij de assen, maak er een orthonormale basis van (4e knop na *Weergeven*), en zoom wat in. Je krijgt dan volgende grafiek (ellips):



Dit geldt niet alleen voor tweedegraadsvergelijkingen, maar ook hogere graadsvergelijkingen in x en y kun je laten tekenen in 2D.

### 8.3.4 Ongelijkheden

Net zoals in *Wiskundehulp* en zoals hierboven bij vergelijkingen, kunnen ook ongelijkheden getekend worden.

## 8.4 Analyse

### 8.4.1 Afgeleiden

Een afgeleide berekenen kan op twee manieren.

#### Eerste werkwijze



Voer de volgende uitdrukking in:  $\sin x(x + \cos x)$



Klik met de RMK op de uitdrukking en kies *Berekenen > Differentiëren met betrekking tot x*. Dat geeft de volgende afgeleide:  $\cos(x) (\cos(x) + x) + \sin(x) (-\sin(x) + 1)$

Je kan dit eventueel aanpassen tot:

$$D(\sin x(x + \cos x)) = \cos(x) (\cos(x) + x) + \sin(x) (-\sin(x) + 1)$$

Het is wel zo dat de hoekeenheid op radialen moet staan. Is dat niet zo, dan krijg je een melding daarvan (maar de instelling wordt niet automatisch aangepast). Je moet de instelling dan eerst manueel zelf in orde brengen en dan opnieuw afleiden.

#### Tweede werkwijze



Voer de volgende uitdrukking in (als breuk, vergeet niet na de d in de teller een spatie te typen, anders wordt de functie sin niet herkend):

$$\frac{d \sin x(x + \cos x)}{dx}$$
$$\cos(x) (\cos(x) + x) + \sin(x) (-\sin(x) + 1)$$



Klik met de RMK op de uitdrukking en kies *Berekenen > Berekenen*

Dit geeft hetzelfde resultaat:

$$\frac{d \sin x(x + \cos x)}{dx} = \cos(x) (\cos(x) + x) + \sin(x) (-\sin(x) + 1)$$

#### Ander voorbeeld

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{1 + x^2} \right) = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Het is niet mogelijk om de noemer van de uitkomst te laten ontbinden, hoewel dit dus eigenlijk heel eenvoudig is. Als je alleen de veelterm  $x^4 + 2x^2 + 1$  ingeeft, dan kun je die overigens wel ontbinden. Maar de breuk zelf is niet verder te vereenvoudigen.

### 8.4.2 Integralen

Net zoals in het programma *Wiskundehulp*, berekent de invoegtoepassing ook integralen. Maar dan alleen van niet al te ingewikkelde functies. Ook bepaalde integralen zijn mogelijk.

Je kan bij onbepaalde integralen weer de twee werkwijzen gebruiken die ook bij afgeleiden mogelijk waren.

#### Eerste werkwijze

$$\sin x \cos x$$
$$-\frac{(\cos(x))^2}{2} + C$$

Nadien te schrijven als:

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{(\cos(x))^2}{2} + C$$

### Tweede werkwijze

$$\int \ln x \, dx = x \ln(x) - x + C$$

### Bepaalde integraal

$$\int_1^2 (x^3 - 4x^2) \, dx = -\frac{67}{12}$$

## 8.5 Matrices

Ook rekenen met matrices is natuurlijk mogelijk. De berekeningen gebeuren altijd via *Berekenen* en dan verder *Berekenen* of *Matrix*.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 & 25 \\ -28 & -14 & -14 \\ 19 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 189$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & \frac{37}{189} & -\frac{22}{189} \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{189} & \frac{19}{189} \\ \frac{4}{27} & -\frac{17}{189} & \frac{5}{189} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

## 8.6 Statistische berekeningen

Ook deze zijn mogelijk, gelijkaardig met wat in *Wiskundehulp* bestaat.



Geef bijvoorbeeld in:

$$\{1,5,4,6,2,4,5,1,3,3,6,4,5,4,1,6,2\}$$



Klik dan met de RMK op de lijst, en kies *Berekenen* > *Lijst*. Hier vind je alle statistische berekeningen die ook in *Wiskundehulp* bestaan. Bijvoorbeeld

- sorteren:

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6\}$$

- gemiddelde berekenen:  $\frac{62}{17}$

- standaardafwijking:  $\frac{4\sqrt{53}}{17}$