



Neem twee natuurlijke getallen. Kwadrateer ze en tel de kwadraten bij elkaar op. Neem hiervan de derdemacht. Het bekomen getal is zelf weer te schrijven als de som van twee kwadraten.

Enkele voorbeelden.

$$a = 1 \text{ en } b = 2 : (1^2 + 2^2)^3 = 5^3 = 125 \text{ en } 125 = 2^2 + 11^2.$$

$$a = 2 \text{ en } b = 3 : (2^2 + 3^2)^3 = 13^3 = 2197 \text{ en } 2197 = 9^2 + 46^2.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)^3 &= [(a + bi)(a - bi)]^3 \\ &= (a + bi)^3 (a - bi)^3 \\ &= (a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i) (a^3 - 3a^2bi - 3ab^2 + b^3i) \\ &= [(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i] [(a^3 - 3ab^2) - (3a^2b - b^3)i] \\ &= (a^3 - 3ab^2)^2 + (3a^2b - b^3)^2.\end{aligned}$$

Hiermee kan je dus vinden hoe je (zie bovenstaand voorbeeld) 2197 kunt schrijven als de som van twee kwadraten. Neem nl. $a = 2$ en $b = 3$ en je vindt dat $a^3 - 3ab^2 = -46$ en $3a^2b - b^3 = 9$. Dus is $2197 = (-46)^2 + 9^2 = 46^2 + 9^2$.

Kan je nu zelf $(1^2 + 4^2)^3 = 17^3 = 4913$ schrijven als de som van twee kwadraten?

