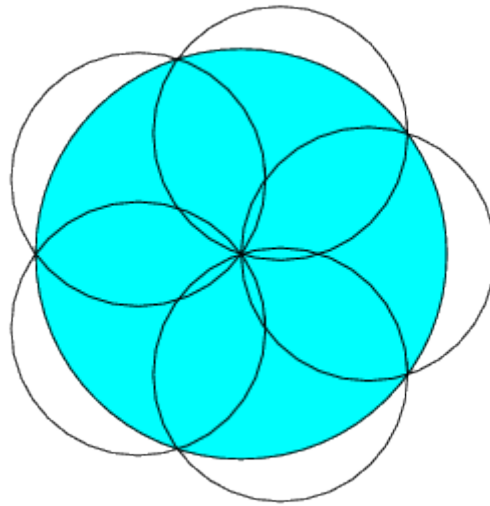


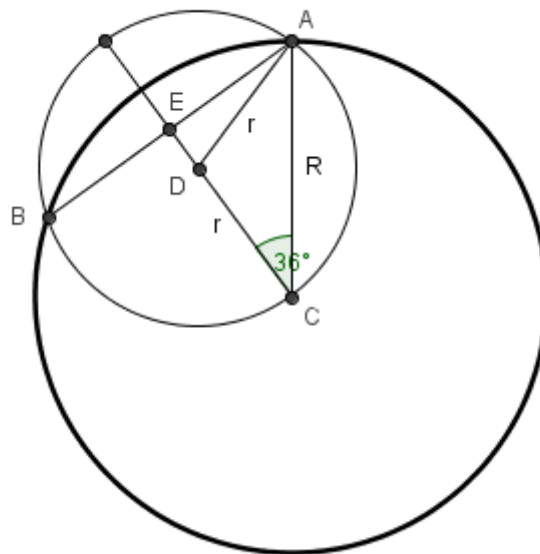
Plaats vijf gelijke kleine schijven met straal r op een grotere schijf met straal R , zodat de vijf schijven symmetrisch liggen t.o.v. het middelpunt van de grote schijf en zodat ze die ook helemaal bedekken (zie figuur). Als de straal r zo klein mogelijk wordt gehouden, dan is

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$



Bewijs.

We maken gebruik van de onderstaande figuur waarop slechts één van de vijf kleine cirkels getekend is. Merk op dat $[AB]$ de zijde is van een regelmatige ingeschreven vijfhoek in de grote cirkel en dat daarom $\widehat{ECD} = 36^\circ$. Op de figuur is $|AD| = |DC| = r$ (de straal van de kleine cirkel) en $|AC| = R$ (de straal van de grote cirkel).



In de rechthoekige driehoek AEC is $|AE| = R \sin 36^\circ$ en $|EC| = R \cos 36^\circ$. Bijgevolg is $|ED| = R \cos 36^\circ - r$.

In de rechthoekige driehoek AED passen we de stelling van Pythagoras toe:

$$r^2 = R^2 \sin^2 36^\circ + (R \cos 36^\circ - r)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 = R^2 \sin^2 36^\circ + R^2 \cos^2 36^\circ - 2rR \cos 36^\circ + r^2$$

$$\Updownarrow \quad (\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = 1)$$

$$0 = R^2 - 2rR \cos 36^\circ$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = R - 2r \cos 36^\circ$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{R}{r} = 2 \cos 36^\circ.$$

We tonen tenslotte met behulp van enkele elementaire goniometrische formules aan dat

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Bewijs.

Vertrek van de algemene formule $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

Stel hierin $\alpha = 36^\circ$: $\cos 108^\circ = 4 \cos^3 36^\circ - 3 \cos 36^\circ$.

Omdat hoeken van 108° en 72° supplementaire hoeken zijn geldt:

$$-\cos 72^\circ = 4 \cos^3 36^\circ - 3 \cos 36^\circ.$$

Pas nu de formule $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ voor de dubbele hoek toe met $\alpha = 36^\circ$, m.a.w. vervang in de bovenstaande vergelijking $\cos 72^\circ$ door $2 \cos^2 36^\circ - 1$:

$$-2 \cos^2 36^\circ + 1 = 4 \cos^3 36^\circ - 3 \cos 36^\circ.$$

We herschrijven deze vergelijking in de vorm $4 \cos^3 36^\circ + 2 \cos^2 36^\circ - 3 \cos 36^\circ - 1 = 0$.

Stel $x = \cos 36^\circ$, dan bekom je de derdegraadsvergelijking $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$, met (na enig rekenwerk) als oplossingen:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{en} \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Omdat $0 < \cos 36^\circ < 1$, is $\cos 36^\circ = x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.